В. Л. РВАЧЕВ, В. А. РВАЧЕВ

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

$$\mathrm{up}'(x) = 2\,\mathrm{up}(2x+1) - 2\,\mathrm{up}(2x-1)$$

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
МАШИНОСТРОЕНИЯ

В. Л. РВАЧЕВ, В. А. РВАЧЕВ

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

КИЕВ
«НАУКОВА ДУМКА»
1979

УДК 517.95 + 518.517

Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. К., Наук. думка, 1979. 196 с.

В монографии рассмотрены новые методы конструктивной теории функций и их приложения к задачам исследования и расчета физико-механических полей различной природы (температурных, деформационных, гидродинамических, электромагнитных и т. п.). В первых двух главах изложен алгебро-логический метод R-функций, в третьей и четвертой главах описаны новые, атомарные, функции, имеющие первостепенное значение не только для развития метода R-функций, но и для теории приближений. С помощью атомарных функций можно строить полиномы, сочетающие достоинства классических степенных и тригонометрических полиномов (бесконечную дифференцируемость и аппроксимационную универсальность) и сплайнов (существование локального базиса). На таких полиномах базируется метод конечных элементов.

Рассчитана на специалистов, интересующихся современными методами вычислительной математики и ее приложениями к решению краевых задач.

Ил. 6. Табл. 3. Список лит.: с. 190—193 (92 назв).

Рецензенты Ю. Г. СТОЯН, И. В. ГОНЧАРЮК

Редакция физико-математической литературы

Р $\frac{20204-008}{М221(04)-79}$ 153—79 1703020000

«Быть может, впоследствии, изучая функции, удовлетворяющие определенным функциональным условиям, анализ естественным путем придет к практически важным неаналитическим функциям, которые будут играть в теории функций не меньшую роль, чем алгебраические и простейшие трансцендентные (e, π) числа в теории чисел».

С. Н. БЕРНШТЕЙН
Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для уравнений с частными производными представляют собой одно из наиболее важных направлений в современной прикладной математике. С ними связаны исследование и расчет различных физико-механических полей (температурных, деформационных, электромагнитных, гидродинамических, фильтрационных и т. п.), и в этом состоит главная причина того постоянного интереса, который проявляют к ним специалисты, работающие в самых различных областях науки и техники. Особенно актуальной является разработка таких методов решения краевых задач, которые имели бы универсальный (насколько это возможно) характер и не требовали от исследователя (как правило, не математика) знания тонких вопросов теории. Кроме того, универсальность обусловливает возможность привлечения методов системного программирования, что имеет существенное значение для автоматизации научных исследований (точнее, их обширной нетворческой части) в области краевых задач. Конечно, для каждого конкретного класса задач существуют или могут быть созданы специальные методы, превосходящие по эффективности любой «универсальный» метод, но их использование требует, как правило, хорошей математической и специальной подготовки и значительных затрат времени, что при необходимости быстро решать все новые и новые задачи, различные по специфике, может оказаться неприемлемым.

К широко известным универсальным методам относятся следующие: сеток (разностных схем) [10, 19, 33, 68], различные вариационные и проекционные [7, 19, 38], конечных элементов [13], локальных вариаций [80] и др. Грань между названными методами весьма условна: разностные методы и метод конечных элементов можно трактовать как вариационные со специальным выбором координатных («пробных») функций, а один и тот же вычислительный алгоритм во многих случаях получают как вариационным, так и проекционным путем. Поэтому можно считать, что во всех таких методах решение краевой задачи имеет вид

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} C_k \psi_k(x) + \psi_0(x), \tag{1}$$

где $\psi_k(x)$ — некоторые заранее выбранные функции. (В сеточном методе коэффициент C_k — значение неизвестного решения в k-м узле сетки, поэтому $\psi_k(x)$ — некоторая функция, равная 1 в k-м узле и 0 — в остальных.) Решение краевой задачи тогда сводится к решению некоторой системы (линейной для линейных краевых задач)

$$F_i(C_1, \ldots, C_N) = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_N$.

Каким же условиям должны удовлетворять функции $\psi_k(x)$? Прежде всего, в большинстве случаев требуется (а в остальных желательно), чтобы функция u_N удовлетворяла краевым условиям рассматриваемой задачи. Основная трудность в решении этого вопроса связана с тем, что в формулы, представляющие функции $\psi_k(x)$, должна некоторым образом включаться информация геометрического характера о форме границы рассматриваемой области (и форме ее участков для краевых условий смешанного типа). Кроме того, эти формулы должны быть конструктивно просты как с точки зрения вычислений их значений, так и при выполнении некоторых аналитических действий, например нахождении их частных производных до требуемого порядка.

В течение длительного времени задача построения в явном виде функций $\psi_k(x)$, удовлетворяющих произвольным краевым условиям для областей сложной формы, казалась практически неразрешимой. Для однородной задачи Дирихле Л. В. Канторович, высказав ряд общих рекомендаций, предложил искать $\psi_k(x)$ в виде $\omega(x)\,\Phi(x)$, где $\omega(x)$ равна 0 на границе и больше 0 внутри рассматриваемой области, а $\Phi(x)$ выбирается в виде некоторого многочлена [19]. Однако построение функции $\omega(x)$ для произвольной области по-прежнему оставалось проблематичным. Рассмотреть этот вопрос с общих позиций удалось лишь после создания конструктивного аппарата R-функций [45], позволившего привлечь для его решения методы алгебры логики.

Задача построения функции $\omega(x)$ — частный случай более общей задачи построения уравнения $\omega(x) = 0$ заданного геометрического объекта («чертежа). Такую задачу принято называть обратной задачей аналитической геометрии, однако ранее она ставилась и решалась в основном лишь для простых (классических) объектов, рассматриваемых как геометрические места точек, расположенных по определенному закону. Заметим, что постановка вопроса о построении уравнения $\omega(x) = 0$ некоторого чертежа правомерна лишь в том случае, если определены конструктивные средства (операции), которыми разрешено пользоваться при построении функции $\omega(x)$.

В аналитической геометрии обычно ограничиваются системой $H_0 = \{x_1 + x_2, \ x_1 x_2, \ a = \mathrm{const} \ \ \forall a \in \mathbb{R}\}$, которая приводит к множеству $\mathfrak{M}(H_0)$ целых рациональных функций (полиномов). Ему соответствует множество $\mathfrak{N}(H_0)$ чертежей, описываемых уравнениями $\omega(x) = 0$, $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H_0)$, и называемых алгебраическими. Однако множество алгебраических чертежей является весьма «бедным». Оно не содержит, например, таких чертежей, как прямоугольник, усеченный конус, двутавр и т. п. В то же время многие сложные чертежи, в том числе и названные выше, также могут быть описаны с помощью системы H_0, но уже не одним уравнением, а системами систем уравнений и неравенств вида $f_i = 0$, $\varphi_j \geqslant 0$, где $f_i, \varphi_j \in \mathfrak{M}(H_0)$. Такие чертежи называются полуалгебраическими [3]. Множество, составленное из полуалгебраических чертежей, обозначим $\mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H_0)$. Из определения множества $\mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H_0)$ следует, что $\mathfrak{N}(H_0) \subset \mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H_0)$, а существование полуалгебраических, но не алгебраических чертежей означает, что $\mathfrak{N}(H_0) \neq \mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H_0)$. Правомерен вопрос: нельзя ли так расширить систему H_0 до некоторой системы H, чтобы в приведенных выше рассуждениях получить строгое равенство $\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H)$? Располагая такой системой H, можно было бы задавать сложные геометрические объекты не упомянутыми выше системами систем уравнений и неравенств, а одним уравнением, написанным в символах системы H.

В § 6—9 гл. 1 показано, что такие системы (названные алгоритмимически полными) существуют и могут быть построены с использованием R-функций. При этом «счастливым» обстоятельством оказалось то, что существуют элементарные алгоритмически полные системы и в целом само множество основных элементарных функций (в сочетании с арифметическими операциями) является алгоритмически полным. Это означает, в частности, что всякий чертеж, составленный из кусков элементарных линий или поверхностей, может быть описан элементарным уравнением $\omega(x) = 0$. С помощью R-функций строить такие уравнения достаточно просто.

Приведенные выше результаты, полученные на уровне аналитической геометрии, нашли естественные приложения в различных областях науки и техники (оптимальный раскрой [72, 73], распознавание зрительных образов [69], устойчивость движения [34] и др.) и, в частности, означали решение упоминавшейся выше задачи построения координатных функций для однородной задачи Дирихле.

Формула $u = \omega\Phi$, удовлетворяющая однородным краевым условиям задачи Дирихле при изменении Φ в пределах некоторого достаточно общего множества (например, $C(\mathbb{R}^n)$), определяет множество (пучок) функций, равных нулю в точках заданного чертежа. В гл. 2 рассмотрена более общая задача о построении формул вида

$u = B(\Phi)$, где B — оператор, для пучков функций, удовлетворяющих в точках заданного чертежа краевым условиям самого общего вида (неоднородным, дифференциальным, нелинейным, смешанным краевым и др.). Использование формул вида $u = B(\Phi)$ легло в основу ряда исследований [43—51] и привело к постановке новых задач, в том числе относящихся к теории приближений. В частности, при выборе функции Φ (неопределенной компоненты пучка) в виде некоторого полинома формула $u = B(\Phi)$ превращается в координатную функцию вида $u = B_1(x, C_1, \dots, C_N)$, а для линейных краевых условий принимает вид (1). Однако, хотя при этом точно удовлетворяются заданные краевые условия, задачу построения координатных функций можно считать успешно решенной лишь при обеспечении определенных аппроксимационных свойств функций $\psi_k(x)$: их линейные комбинации должны достаточно хорошо приближать функции того класса, которому принадлежит решение рассматриваемой краевой задачи.

Априорная информация об искомом решении, которой (в лучшем случае) располагает исследователь, сводится к знанию гладкости решения (числу раз дифференцируемости) и константы, ограничивающей его старшие производные.

Исследователи, занимающиеся теорией приближений, давно пытаются выяснить вопрос о скорости приближения дифференцируемых функций элементами линейных пространств как функции размерности этих пространств. Установлена зависимость этой скорости от гладкости [14, 26, 30, 39, 74].

Естественно потребовать, чтобы функции $\psi_k(x)$ обладали наилучшими аппроксимационными свойствами, причем, поскольку информации о гладкости искомого решения мало, желательно, чтобы их линейные комбинации приближали функции любой гладкости с наибольшей возможной по теории приближений скоростью, т. е. обладали свойством аппроксимационной универсальности [56]. Как известно, алгебраические (тригонометрические) полиномы обладают аппроксимационной универсальностью [14, 26, 74]. Однако их применение имеет тот недостаток (это отмечается, например, в предисловии Н. Н. Яненко к работе [13]), что матрицы соответствующих линейных алгебраических систем являются, вообще говоря, полностью заполненными, т. е. для хранения в памяти ЭВМ элементов матрицы требуется N^2 ячеек. Кроме того, вычисление коэффициентов в методах типа метода Ритца — Галеркина требует вычисления кратных интегралов по всей области, в которой решается задача. К тому же полученные матрицы часто плохо обусловлены. Все это ограничивает возможности применения классических многочленов. Вместо них широко применяют финитные функции с малым носителем — так называемые локальные функции, в основном кусочно-полиномиальные — локальные сплайны [7, 88]. Например, разностные схемы можно получать методом коллокаций с базисными функциями — финитными сплайнами [7]. При этом матрицы оказываются разреженными (т. е. требуют только $o(N^2)$

ячеек памяти), а каждый элемент их — интеграл по малой области и может быть вычислен быстрее. Это позволяет взять N гораздо большим, чем для многочленов, а следовательно, получить большую точность. Однако сплайн-функции при всех их достоинствах не обладают в силу конечной гладкости аппроксимационной универсальностью. В гл. 3 и 4 описано построение новых локальных функций класса C^∞, обладающих таковой. Конечно, они несколько «менее локальны», чем сплайны, и несколько «менее универсальны» (это касается приближения аналитических функций), чем многочлены, но зато обладают и тем и другим свойством одновременно.

Гл. 1 и 2 написаны В. Л. Рвачевым, а гл. 3 и 4 — В. А. Рвачевым. Результаты § 3 гл. 3 и § 11 гл. 4 получены авторами совместно. Исследования, описанные в § 1, 2,4—8 гл. 3 и § 1—10 гл. 4, включая и их постановку, принадлежат В. А. Рвачеву.

ГЛАВА 1

АЛГЕБРА ЛОГИКИ И R-ФУНКЦИИ

§ 1. КОМПОЗИЦИЯ И СУПЕРПОЗИЦИЯ. H-РЕАЛИЗУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Для задания функций в виде формул чаще всего пользуются так называемыми элементарными функциями — суперпозициями базисной системы

$$H_{э} = \Big\{x \pm y,\ xy,\ \frac{x}{y},\ x^n,\ a^x\,(a > 0),$$
$$\log_a x\,(a > 0),\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x, \tag{1.1}$$
$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,\ a\quad \forall a \in (-\infty,\ +\infty)\Big\},$$

состоящей из арифметических операций, основных элементарных функций и констант.

Во времена Ньютона и Лейбница понятие функции, по существу, исчерпывалось элементарными функциями. Лишь позже, когда было установлено, что некоторые интегралы от элементарных функций нельзя представить в элементарном виде, не все уравнения с элементарными коэффициентами можно разрешить в элементарных функциях, и т. д., возникла общая теоретико-множественная точка зрения и элементарные функции стали рассматриваться как примеры функций вообще.

По мере развития математики число функций, для которых вводилась стандартная символика, постепенно расширялось, причем происходило это и в рамках элементарных функций (например, гиперболические), и за счет так называемых специальных функций (Бесселя, Матье и т. д.). Заметим, что это расширение символики осуществлялось путем своего рода «естественного отбора» и определялось прежде всего практической значимостью рассматриваемых функций.

Необходимость совершенствования конструктивных средств математики, которые до недавнего времени почти исчерпывались базисной системой (1.1), особенно возросла в последние годы, когда широкое распространение получили быстродействующие вычислительные машины и возникла проблема повышения эффективности их использования. В частности, появились серьезные основания для расширения системы (1.1) как в рамках самих элементарных функций, так и за их пределами.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество, $\mathfrak{X}^n$ — его n-я степень. Отображения вида $y = f(x) : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^m$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ назовем **правильными с алфавитом** $\mathfrak{X}$. Множество всех правильных с алфавитом $\mathfrak{X}$ отображений обозначим $F(\mathfrak{X})$.

Если $y = f(x) : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^m$ и $u = \varphi(y) : \mathfrak{X}^m \to \mathfrak{X}^p$, то отображение $u = \varphi[f(x)] = \varphi \circ f : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^p$ принято называть **композицией** f и φ.

Введем понятие **суперпозиции**, некоторым образом обобщающее понятие композиции. Пусть H — некоторая система (не обязательно конечная) правильных с алфавитом $\mathfrak{X}$ отображений:

$$H = \{y = \varphi_i(x) : \mathfrak{X}^{n_i} \to \mathfrak{X}^{m_i}\}. \tag{1.2}$$

Множество $\mathfrak{M}(H)$ суперпозиций H включает:

а) отображения, составляющие H;

б) тождественное отображение $y = x : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$;

в) отображения вида $f = (\varphi, \psi) : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^{m+p}$, где $\varphi : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^m$, $\psi : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^p$, $(\varphi, \psi) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \ldots, \psi_p)$, а $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}(H)$;

г) композиции вида $\varphi \circ \psi$, $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}(H)$.

Для того чтобы подчеркнуть происхождение суперпозиций от базисной системы H, будем называть элементы множества $\mathfrak{M}(H)$ **H-реализуемыми отображениями**, а если $\mathfrak{X}$ — числовое множество, то — **H-реализуемыми функциями**.

Заметим, что понятие H-реализуемой функции является формализацией понятия функции, заданой аналитически (в виде единого аналитического выражения). Действительно, если для обозначения функций, составляющих базисную систему (1.2), ввести некоторый набор символов, то для каждой H-реализуемой функции можно будет написать формулу, содержащую лишь указанные символы, символы независимых переменных и, возможно, открывающие и закрывающие скобки.

С понятием суперпозиции тесно связано понятие **замкнутого множества**. Множество $\mathfrak{M}_0$ называется замкнутым (суперпозиционно), если для всякой системы $H \subset \mathfrak{M}_0$ множество суперпозиций $\mathfrak{M}(H) \subset \mathfrak{M}_0$.

Если все возможные композиции функций из $\mathfrak{M}$ принадлежат $\mathfrak{M}$, но имеются суперпозиции функций из $\mathfrak{M}$, не принадлежащие $\mathfrak{M}$, то множество $\mathfrak{M}$ будем называть **композиционно замкнутым**. Очевидно, что всякое замкнутое множество является композиционно замкнутым.

Примерами замкнутых множеств являются:

1) множество $C^k(\mathbb{R}^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ k раз непрерывно дифференцируемых везде функций (в том числе при $k = 0$ и $k = \infty$);

2) множество C^R целых рациональных функций;

3) множество C^A везде аналитических функций (т. е. разложимых в ряд Тейлора в окрестности любой точки);

4) множество $F(\mathfrak{X})$ правильных отображений с алфавитом $\mathfrak{X}$.

Теорема 1. *Пересечение замкнутых (композиционно замкнутых) множеств есть замкнутое (композиционно замкнутое) множество. (Пустое множество считается замкнутым по определению).*

Доказательство очевидно.

В дальнейшем широко используется понятие полной системы отображений, смысл которого заключается в следующем.

Система H называется **полной** по отношению к множеству $\mathfrak{M}_0$, если $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}(H)$, т. е. если всякая функция из $\mathfrak{M}_0$ является H-реализуемой.

Пример 1. Система $H_0 = \{x_1 + x_2,\ x_1x_2,\ a\ \ \forall a \in \mathbb{R}\}$ полна по отношению к множеству C^R целых рациональных функций.

Пример 2. Пусть H — множество правильных непрерывных функций двух аргументов с алфавитом $\mathfrak{X} = [0, 1]$, а C — множество правильных непрерывных функций произвольного числа аргументов с тем же алфавитом. Из работ А. Н. Колмогорова [22] и В. И. Арнольда [4] следует, что всякая непрерывная функция n аргументов ($n \geqslant 3$) может быть представлена как суперпозиция непрерывных функций двух аргументов. Следовательно, множество H представляет собой полную систему по отношению к множеству C.

Если для функций, составляющих полную систему H, введена некоторая символика, то всякую функцию из $\mathfrak{M}_0$ можно представить в виде единого аналитического выражения, записанного с помощью этой символики.

Пусть $T : \mathfrak{M}_0 \to 2^{\mathfrak{M}_0}$, $2^{\mathfrak{M}_0}$ — множество всех подмножеств $\mathfrak{M}_0$. Элементы множества T_x, соответствующего элементу $x \in \mathfrak{M}_0$, будем называть похожими на x по признаку T. Множество $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_0$ называется замкнутым по признаку T, если для всякой суперпозиции f отображений из $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}_1$ имеется похожее на f (по признаку T) отображение. Пусть $H \subset \mathfrak{M}_1$ — система отображений такая, что для всех $x \in \mathfrak{M}_1$ множество $Tx \cap \mathfrak{M}(H)$, где $\mathfrak{M}(H)$ — множество H-реализуемых отображений, является непустым. В этом случае систему H будем называть **полной по признаку T** или **достаточно полной.** Нетрудно заметить, что если T — каноническая инъекция $\mathfrak{M}$ в $2^{\mathfrak{M}}$, то полнота по признаку T есть полнота H по отношению к $\mathfrak{M}$ в обычном смысле.

Пример 3. Будем говорить, что функция $\varphi \in C^k(\Omega)$ «похожа» по признаку T_ε на функцию $f \in C^k(\Omega)$, если $\| f - \varphi \|_{C^k(\Omega)} < \varepsilon$. Система $H_0 = \{x_1 + x_2,\ x_1x_2,\ a\ \ \forall a \in \mathbb{R}\}$ является полной по признаку T_ε в $C^k(\Omega)$. Это следует из известной теоремы Вейерштрасса [19] о возможности приближения функций из $C^k(\Omega)$ полиномами (т. е. элементами $\mathfrak{M}(H_0)$).

Пример 4. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ и имеющих на нем конечное число нулей. Каждой функции

$f \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие множество $T(f) \subset \mathfrak{M}$ функций, нули которых совпадают с нулями f. Тогда достаточно полной является, например, система $H_0 = \{x_1 + x_2,\ x_1x_2,\ a \quad \forall a \in \mathbb{R}\}$.

§ 2. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

1. **Функциями k-значной логики** будем называть правильные функции вида $F: B_k^n \to B_k^m$, где $B_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ — алфавит, состоящий из k элементов. Функции двузначной логики называются также **булевыми** или **переключательными**. Множество всех функций k-значной логики обозначим $F(B_k)$. (В качестве элементов, составляющих алфавит, можно, вообще говоря, использовать любые символы. Например, в исчислении высказываний используют слова «ложь» и «истина».)

Нетрудно подсчитать, что область определения функции $Y = F(X): B_k^n \to B_k^m$ состоит из $\beta(n, k) = k^n$ точек $X^i = (X_1^i, \ldots, X_n^i)$, $i = 1, \ldots, k^n$. Отсюда следует, что всякая функция из $F(B_k)$, определенная на множестве B_k^n, может быть задана таблицей, состоящей из k^n строк. Так как каждой такой строке может соответствовать любая из k^m точек $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ множества B_k^m, то в $F(B_k)$ имеется $N(n, m, k) = k^{mk^n}$ различных функций вида $F: B_k^n \to B_k^m$.

На первый взгляд, может показаться, что изучение функций k-значной логики можно свести к рассмотрению соответствующих им таблиц. Однако такой путь нереален из-за того, что количество функций k-значной логики быстро возрастает с ростом n и уже при относительно небольших значениях n, даже если $k = 2$, $m = 1$, достигает астрономических величин. Так, например,

$$N(5, 1, 2) = 2^{2^5} = 4\,294\,967\,296.$$

Множество $F(B_k)$, как и всякое множество правильных функций с фиксированным алфавитом, является замкнутым. Это открывает возможность аналитического изучения функций k-значной логики путем построения полных систем и введения для них некоторой символики.

2. Приведем некоторые сведения о булевых функциях.

Имеется 2^{2^n} различных булевых функций вида $F: B_2^n \to B_2$. При $n = 1$ получаем 4 функции:

X	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Две из этих функций являются тождественными константами: $F_1 \equiv 0$, $F_4 \equiv 1$, а $F_2 \equiv X$. И лишь функция F_3 представляет собой нечто новое: она равна 1, если $X = 0$, и равна 0, если $X = 1$. Эту функцию принято называть **отрицанием** и обозначать $\overline{X}$.

Введем следующие обозначения и наименования для некоторых булевых функций двух переменных:

конъюнкция ($X_1 \wedge X_2$)

X_1	X_2: 0	1
0	0	0
1	0	1

дизъюнкция ($X_1 \vee X_2$)

X_1	X_2: 0	1
0	0	1
1	1	1

импликация ($X_1 \to X_2$)

X_1	X_2: 0	1
0	1	1
1	0	1

равнозначность ($X_1 \sim X_2$)

X_1	X_2: 0	1
0	1	0
1	0	1

операция Шеффера ($X_1 \mid X_2$)

X_1	X_2: 0	1
0	1	1
1	1	0

Для булевых функций имеются конечные полные системы [9]. Наиболее употребительной полной системой булевых функций является $H = \{\overline{X}, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2\}$. Ниже, в п. 3, полнота этой системы доказана. Показано также, что она сохраняется и после исключения одной из функций $X_1 \wedge X_2$ или $X_1 \vee X_2$. Однако для большей выразительности языка булевых функций обычно пользуются системой $H = \{\overline{X}, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2\}$, иногда добавляя к ней импликацию $X_1 \to X_2$, равнозначность $X_1 \sim X_2$ и операцию Шеффера X_1/X_2.

Для конъюнкции, дизъюнкции и отрицания выполняются следующие тождества:

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ.\ X_1 \wedge X_2 \equiv X_2 \wedge X_1, \\ 2^\circ.\ X_1 \vee X_2 \equiv X_2 \vee X_1 \end{array}\right\} \text{— коммутативность;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3^\circ.\ (X_1 \wedge X_2) \wedge X_3 \equiv X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3), \\ 4^\circ.\ (X_1 \vee X_2) \vee X_3 \equiv X_1 \vee (X_2 \vee X_3) \end{array}\right\} \text{— ассоциативность;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5^\circ.\ X_1 \wedge (X_2 \vee X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3), \\ 6^\circ.\ X_1 \vee (X_2 \wedge X_3) \equiv (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3) \end{array}\right\} \text{— дистрибутив-}$$

ность;

$$\left.\begin{array}{l} 7^\circ.\ X \wedge X \equiv X, \\ 8^\circ.\ X \vee X \equiv X \end{array}\right\} \text{— идемпотентность;}$$

$$9^\circ.\ \overline{\overline{X}} \equiv X \text{ — закон двойного отрицания;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10^\circ.\ \overline{X_1 \wedge X_2} \equiv \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2, \\ 11^\circ.\ \overline{X_1 \vee X_2} \equiv \overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2 \end{array}\right\} \text{— правила де Моргана;}$$

$$12^\circ.\ X \wedge \overline{X} \equiv 0 \text{ — закон логического противоречия;}$$

$$13^\circ.\ X \vee \overline{X} \equiv 1 \text{ — закон исключенного третьего;}$$

$$\left.\begin{array}{l}14^\circ.\ 1 \wedge X \equiv X,\\ 15^\circ.\ 1 \vee X \equiv 1,\\ 16^\circ.\ 0 \wedge X \equiv 0,\\ 17^\circ.\ 0 \vee X \equiv X,\\ 18^\circ.\ \overline{0} \equiv 1,\\ 19^\circ.\ \overline{1} \equiv 0\end{array}\right\} \text{— операции с константами 0 и 1.}$$

Нетрудно заметить, что если в формулах 1°—19° произвести формальную замену символов $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$, 0 на 1 и 1 на 0, то получим ту же систему равенств. Отсюда следует **принцип двойственности**, который состоит в следующем.

Пусть F, $\Phi : B_2^n \to B_2$ — суперпозиции $H = \{\overline{X},\ X_1 \wedge X_2,\ X_1 \vee X_2\}$ и $F \equiv \Phi$. Тогда, если F_1 и Φ_1 получены из F и Φ указанной заменой символов, то $F_1 \equiv \Phi_1$.

3. Конъюнкции вида $X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X}_3$, $X_1 \wedge \overline{X}_2 \wedge X_3 \wedge \overline{X}_4$, $X_1 \wedge X_2$ и т. п., составленные из аргументов или их отрицаний, называются элементарными конъюнкциями, а формулы вида $X_1 \vee X_2 \vee \overline{X}_3$, $X_1 \vee \overline{X}_3$, ... — элементарными дизъюнкциями. Аргументы и их отрицания считаются элементарными дизъюнкциями и конъюнкциями одновременно.

Определение. Дизъюнкция (конъюнкция) конечного числа элементарных конъюнкций (дизъюнкций) называется **дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой.**

Согласно принципу двойственности достаточно ограничиться рассмотрением дизъюнктивных нормальных форм. Пусть

$$X^\sigma = \begin{cases} X, & \text{если } \sigma = 1,\\ \overline{X}, & \text{если } \sigma = 0.\end{cases} \tag{1.3}$$

Используя это обозначение, можно, например, написать

$$(\overline{X}_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \overline{X}_2 \wedge X_3) \equiv (X_1^0 \wedge X_2^1) \vee (X_1^1 \wedge X_2^0 \wedge X_3^1).$$

Теорема 1. *Каждую булеву функцию $Y = F(X)$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, можно представить в виде*

$$F \equiv \bigvee_{l=1}^{l=q}\left[\left(\bigwedge_{j=1}^{j=k} X_j^{\sigma_j^{(l)}}\right) \wedge F(\sigma_1^{(l)}, \ldots, \sigma_k^{(l)}, X_{k+1}, \ldots, X_n)\right], \tag{1.4}$$

где $q = 2^k$, причем различным индексам l соответствуют различные наборы $\sigma_1^{(l)}, \ldots, \sigma_k^{(l)}$.

Формула (1.4) называется формулой разложения функции F по аргументам $X_1, \ldots, X_k$.

Доказательство. Из свойств 3° и 16° и формулы (1.3) следует, что конъюнкция $X_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge X_k^{\sigma_k}$ равна единице тогда и только тогда, когда $X_i = \sigma_i$ ($i = 1, \ldots, k$). Следовательно, выражение в квадратных скобках в (1.4) равняется нулю на всех наборах

$\sigma_1^{(i)}, \ldots, \sigma_k^{(i)}$, за исключением набора $\sigma_1^{(i)} = X_1, \ldots, \sigma_k^{(i)} = X_k$. Для этого набора

$$\left(\bigwedge_{j=1}^{j=k} X_j^{\sigma_j^{(i)}}\right) \wedge F(\sigma_1^{(i)}, \ldots, \sigma_k^{(i)}, X_{k+1}, \ldots, X_n) \equiv$$

$$\equiv \left(\bigwedge_{j=1}^{j=k} X_j^{X_j}\right) \wedge F(X_1, \ldots, X_n) \equiv 1 \wedge F(X_1, \ldots, X_n) \equiv F(X_1, \ldots, X_n).$$

Итак, формула (1.4) принимает вид

$$F(X_1, \ldots, X_n) \equiv 0 \vee \ldots \vee 0 \vee F(X_1, \ldots, X_n) \vee 0 \vee \ldots \vee 0$$

и, согласно 17°, является тождеством.

Следствие. Каждая булева функция может быть представлена в дизъюнктивной нормальной форме.

Действительно, если в (1.4) положить $k = n$, получим

$$F(X_1, \ldots, X_n) \equiv \bigvee_{i=1}^{i=2^n} [(X_1^{\sigma_1^{(i)}} \wedge \ldots \wedge X_n^{\sigma_n^{(i)}}) \wedge F(\sigma_1^{(i)}, \ldots, \sigma_n^{(i)})].$$

Так как $F(\sigma_1^{(i)}, \ldots, \sigma_n^{(i)})$ равняется либо единице, либо нулю, то согласно 14°, 15°

$$F(X_1, \ldots, X_n) \equiv \bigvee_{F(\sigma_1^{(i)}, \ldots, \sigma_n^{(i)})=1} (X_1^{\sigma_1^{(i)}} \wedge \ldots \wedge X_n^{\sigma_n^{(i)}}), \qquad (1.5)$$

где дизъюнкция применяется к тем элементарным конъюнкциям, для которых $F(\sigma_1^{(i)}, \ldots, \sigma_n^{(i)}) = 1$.

Из (1.5) следует простое правило перехода от табличного задания булевых функций к аналитическому (в виде дизъюнктивных нормальных форм): надо отметить те наборы, на которых булева функция равна единице, и взять дизъюнкцию соответствующих им элементарных конъюнкций, в которых единицам соответствуют аргументы, а нулям — их отрицания.

Из формулы (1.5) следует также упоминавшаяся ранее полнота системы $H = \{\overline{X}, X_1 \wedge X_2\}$. В частности, через конъюнкцию и отрицание можно выразить дизъюнкцию, импликацию, равнозначность и операцию Шеффера:

$$\begin{gathered} X_1 \vee X_2 \equiv \overline{\overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2}; \\ X_1/X_2 \equiv \overline{X_1 \wedge X_2}; \\ X_1 \to X_2 \equiv \overline{X}_1 \vee X_2; \\ X_1 \sim X_2 \equiv (\overline{X}_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X}_2). \end{gathered} \qquad (1.6)$$

С другой стороны, непосредственной проверкой (с помощью таблиц соответствующих функций) убеждаемся, что

$$\begin{gathered} \overline{X} \equiv X/X; \\ X_1 \wedge X_2 \equiv (X_1/X_2)/(X_1/X_2); \\ X_1 \vee X_2 \equiv (X_1/X_1)/(X_2/X_2). \end{gathered} \qquad (1.7)$$

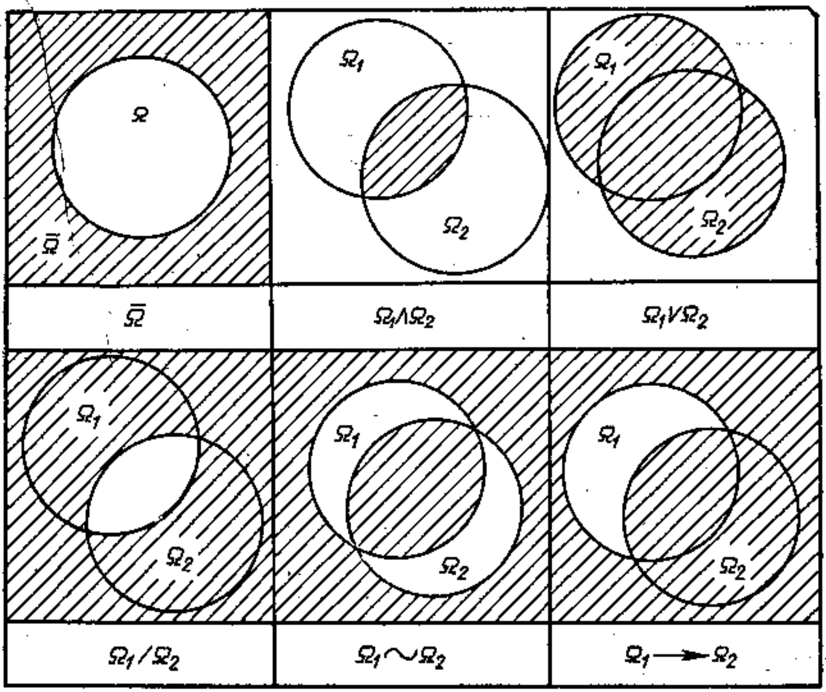

Рис. 1

Отсюда следует полнота системы $H = \{X/X\}$, состоящей из единственной операции Шеффера.

Для булевых функций развита теория приведения описывающих их формул к наиболее простому («минимальному») виду (методы Квайна, Мак-Класки, Блейка и др. [9, 81]).

4. Булевы функции допускают простую геометрическую интерпретацию.

Функцию $\Omega : \mathbb{R}^n \to B_2$, принимающую значение 1 в некоторой области Ω и значение 0 в остальных точках пространства $\mathbb{R}^n$, назовем **двузначным предикатом,** определяющим область Ω (иногда употребляется термин **характеристическая функция** области Ω). Тогда отрицание $\overline{\Omega} : \mathbb{R}^n \to B_2$ определяет дополнение $\overline{\Omega}$ области Ω. (Для простоты предикат и соответствующую ему область обозначаем одной и той же буквой Ω.)

Если Ω_1 и Ω_2 есть предикаты для соответствующих областей Ω_1 и Ω_2, то предикат $\Omega_1 \bigwedge \Omega_2$ определяет пересечение $\Omega_1 \bigcap \Omega_2$, а предикат $\Omega_1 \bigvee \Omega_2$ — объединение $\Omega_1 \bigcup \Omega_2$. Согласно формулам (1.6) операции Шеффера Ω_1/Ω_2 соответствует область $\overline{\Omega_1 \bigcap \Omega_2}$, импликации $\Omega_1 \to \Omega_2$ — область $\overline{\Omega}_1 \bigcup \Omega_2$, а равнозначности $\Omega_1 \sim \Omega_2$ — область $(\overline{\Omega}_1 \bigcup \Omega_2) \bigcap (\Omega_1 \bigcup \overline{\Omega}_2)$. На рис. 1 приведены

Таблица 1

X	φ_0	φ_1	φ_2	$\bar{X}$	$\tilde{X}$
0	2	0	0	2	1
1	0	2	0	1	2
2	0	0	2	0	0

диаграммы Эйлера— Венна, наглядно изображающие названные выше области [45].

Используя диаграммы Эйлера — Венна, можно строить предикаты, соответствующие произвольным булевым функциям. Более подробно об этом будет рассказано в § 7.

5. Опишем некоторые наиболее употребительные функции k-значной логики с алфавитом $B_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Функции $f_i \equiv \equiv i$, ($i = 0, 1, \ldots, k-1$), называются **константами** k-значной логики. Среди функций одной переменной отметим **характеристические функции**

$$\varphi_i(X) = \begin{cases} k-1 & \text{при} \quad X = i, \\ 0 & \text{при} \quad X \neq i; \end{cases} \tag{1.8}$$

«отрицание» («инверсию»)

$$\bar{X} = \begin{cases} k-1 & \text{при } X = 0, \\ k-2 & \text{при } X = 1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 & \text{при } X = k-1; \end{cases} \tag{1.9}$$

«циклическое отрицание» («цикл»)

$$\tilde{X} = \begin{cases} 1 & \text{при } X = 0, \\ 2 & \text{при } X = 1; \\ \cdots\cdots\cdots \\ k-1 & \text{при } X = k-2, \\ 0 & \text{при } X = k-1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Нетрудно убедиться, что при $k = 2$, т. е. при переходе к двузначной логике, характеристическая функция $\varphi_0(X)$ (1.8), отрицание $\bar{X}$ (1.9) и цикл $\tilde{X}$ (1.10) превращаются в отрицание $\bar{X}$ булевой алгебры. Характеристическая функция $\varphi_1(x)$ при $k = 2$ есть X.

Из функций двух переменных отметим k-значные дизъюнкцию $X_1 \vee X_2$ и конъюнкцию $X_1 \wedge X_2$:

$$\begin{aligned} X_1 \vee X_2 &\equiv \max(X_1, X_2), \\ X_1 \wedge X_2 &\equiv \min(X_1, X_2). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Весьма интересна k-значная функция Вебба [81, 82]

$$W(X_1, X_2) = X_1 \tilde{\vee} X_2,$$

образующая полную систему в k-значной логике.

Среди других полных систем отметим систему Россера и Тиккета $H = \{0, 1, \ldots, k-1, \varphi_i(X) \ (i = 0, 1, \ldots, k-1), X_1 \vee X_2, X_1 \wedge \wedge X_2\}$ и систему Поста $H = \{X_1 \wedge X_2, \tilde{X}\}$.

Таблица 2

X_1	X_2	$X_1 \wedge \wedge X_2$	$X_1 \vee \vee X_2$	$W(X_1, X_2)$	X_1	X_2	$X_1 \wedge \wedge X_2$	$X_1 \vee \vee X_2$	$W(X_1, X_2)$	X_1	X_2	$X_1 \wedge \wedge X_2$	$X_1 \vee \vee X_2$	$W(X_1, X_2)$
0	0	0	0	1	1	0	0	1	2	2	0	1	2	0
0	1	0	1	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	0
0	2	0	2	0	1	2	1	2	0	2	2	2	2	0

6. Рассмотрим более подробно случай трехзначной логики с алфавитом $B_3 = \{0, 1, 2\}$.

При $k = 3$ функция $Y = F(X) : B_3^n \to B_3$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, может быть задана таблицей с числом строк 3^n. В табл. 1 и 2 приведены значения основных функций трехзначной логики. Используя эти значения, нетрудно проверить справедливость следующих формул:

1°. $\overline{\overline{X}} \equiv X$;

2°. $X \wedge 0 \equiv 0$;

3°. $X \wedge X \equiv X$;

4°. $X \wedge 2 \equiv X$;

5°. $X \vee 0 \equiv X$;

6°. $X \vee 2 \equiv 2$;

7°. $X \vee X \equiv X$;

8°. $\tilde{\tilde{X}} \equiv X$;

9°. $\overline{X_1 \wedge X_2} \equiv \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2$;

10°. $\overline{X_1 \vee X_2} \equiv \overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2$;

11°. $(X_1 \wedge X_2) \wedge X_3 \equiv X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3)$;

12°. $(X_1 \vee X_2) \vee X_3 \equiv X_1 \vee (X_2 \vee X_3)$;

13°. $(X_1 \wedge X_2) \vee X_3 \equiv (X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_3)$;

14°. $(X_1 \vee X_2) \wedge X_3 \equiv (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$;

15°. $1 \wedge X \wedge \overline{X} \equiv X \wedge \overline{X}$;

16°. $(1 \vee Y) \wedge X \wedge \overline{X} \equiv X \wedge \overline{X}$;

17°. $(X \wedge Y) \vee X \equiv X$;

18°. $(X \vee Y) \wedge X \equiv X$.

Эти формулы можно использовать для преобразования функций трехзначной логики и построения аналогов дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм [47, 48].

7. Рассмотрим некоторые замкнутые множества в трехзначной логике, которые будут использованы при изучении R-функций.

Пусть $q\ (X^\circ)$ есть множество индексов тех координат точки $X^\circ = (X_1^\circ, \ldots, X_n^\circ)$, $X_i^\circ \in B_3 = \{0, 1, 2\}$, которые равны единице. (Множество $q\ (X^\circ)$ может быть и пустым.) Будем говорить, что точка X принадлежит частичной 1-окрестности $M_1\ (X^\circ)$ точки X°, если выполняется условие

$$\max_{i \in q(X^\circ)} |X_i - X_i^\circ| \leqslant 1. \tag{1.12}$$

Введем в рассмотрение множество Q_3^1 функций трехзначной логики, включая в него функции вида $F\ (X) : B_3^n \to B_3$, которые обладают следующим свойством: если в некоторой точке X° $F\ (X^\circ) = s \neq 1$, то $F\ (X) = s$ во всех точках окрестности (1.12). К множеству Q_3^1 будем относить также функции (вектор-функции) вида $F\ (X) : B_3^n \to B_3^m$, $F\ (X) = \{F_1\ (X), \ldots, F_m\ (X)\}$, если каждая из функций $F_i\ (X)$ принадлежит Q_3^1.

Теорема 2. *Множество Q_3^1 является функционально замкнутым.*

Докажем вначале, что если $F : B_3^n \to B_3^m$, $\Phi : B_3^m \to B_3$ и $F, \Phi \in Q_3^1$, то $\Phi \circ F \in Q_3^1$. Пусть X° — некоторая точка B_3^n, $Y^\circ = F\,(X^\circ)$, $Z^\circ = \Phi \circ F\ (X^\circ) \neq 1$. Из $F\ (X) \subset Q_3^1$ следует, что те из координат точки Y°, которые не равны единице, не изменятся при переходе к другим точкам частичной 1-окрестности (1.12) точки X°. Изменяться могут лишь те координаты точки Y°, которые равны единице. Но тогда из $\Phi \subset Q_3^1$ следует, что композиция $\Phi \circ F$ имеет во всех этих точках постоянное значение, равное $\Phi \circ F\ (X^\circ)$.

Из доказанного и из определения множества Q_3^1 следует, что к множеству Q_3^1 принадлежит также композиция $\Phi \circ F$, если $F : B_3^n \to B_3^m$, $\Phi : B_3^m \to B_3^s$, Φ, $F \in Q_3^1$. Замкнутость Q_3^1 следует из принадлежности к этому множеству функции $Y = X$, а также функций вида $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_q)$, если $\Phi_i \in Q_3^1$, $i = 1, \ldots, q$.

Теорема 3. *Если $F : B_3^n \to B_3$, $F \in Q_3^1$, то*

$$\begin{gathered} F\,(X) = F\,(X_1, \ldots, X_n) = [F\,(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge \\ \wedge X_i \wedge \overline{X}_i] \vee [F\,(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge \overline{X}_i] \vee \\ \vee [F\,(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge X_i] \vee \\ \vee [F\,(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge F\,(X_1, \ldots X_{i-1}, 1, \\ X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge F\,(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n)], \end{gathered} \tag{1.13}$$

где $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee X_2$, $\overline{X}$ — рассмотренные выше функции трехзначной логики (см. табл. 1, 2).

Доказательство. Достаточно показать, что значения левой и правой частей формулы (1.13) совпадают в точках

$$X^j = (X_1, \ldots, X_{i-1}, j, X_{i+1}, \ldots, X_n) \quad (j = 0, 1, 2).$$

А. Подставим в правую часть формулы (1.13) координаты точки X^0. Тогда, пользуясь приведенными в п. 6. настоящего параграфа свойствами операций $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee X_2$ и $\overline{X}$, получаем

$$[F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge 0 \wedge 2] \vee [F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge 2] \vee [F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge \wedge 0] \vee [F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n)] =$$
$$= F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge \{2 \vee [F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n)]\} =$$
$$= F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge 2 =$$
$$= F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) = F(X^0).$$

Б. Для точки X^2 аналогично получаем

$$[F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge 2 \wedge 0] \vee [F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge 0] \vee [F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge \wedge 2] \vee [F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n)] =$$
$$= F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge \{2 \vee [F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n)]\} =$$
$$= F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge 2 =$$
$$= F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n) = F(X^2).$$

В. Пусть теперь в (1.13) $X = X^1$. Предположим вначале, что $F(X^1) = 0$. Так как $F(X) \in Q_3^1$, то $F(X^0) = F(X^2) = 0$. Поэтому правая часть формулы (1.13) при $X = X^1$ имеет вид

$$(0 \wedge 1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0 \wedge 0) = F(X^1).$$

Пусть теперь $F(X^1) = 2$. Тогда $F(X^0) = F(X^2) = 2$, и для правой части формулы (1.13) получаем

$$(2 \wedge 1 \wedge 1) \vee (2 \wedge 1) \vee (2 \wedge 1) \vee (2 \wedge 2 \wedge 2) = 2 = F(X^1).$$

Пусть, наконец, $F(X^1) = 1$. Тогда

$$(1 \wedge 1 \wedge 1) \vee [F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge 1] \vee \vee [F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge 1] \vee [F(X_1, \ldots \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) \wedge 1 \wedge F(X_1, \ldots, X_{i-1}, 2, X_{i+1}, \ldots \ldots, X_n)] = 1 = F(X^1).$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Система* $H = \{Y_1 \equiv 0;\ Y_2 \equiv 1;\ Y_3 \equiv \overline{X};\ Y_4 \equiv X_1 \wedge \wedge X_2\}$ *полна в* Q_3^1.

Проведем доказательство методом математической индукции.

1. Покажем вначале, что все одноместные функции множества Q_3^1 представимы в виде суперпозиции функций $Y_1 \div Y_4$. Существует $3^3 = 27$ различных одноместных функций трехзначной логики. Значения этих функций приведены в табл. 3.

Таблица 3

X	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1

X	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}	F_{25}	F_{26}	F_{27}	
0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	
2	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	

Непосредственной проверкой можно убедиться, что множеству Q_3^1 принадлежат функции F_1, F_4, F_5, F_6, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{22}, F_{23}, F_{24}, F_{27}. Легко проверить также справедливость следующих формул:

$$
\begin{array}{ll}
1.\ F_1 \equiv 0; & 6.\ F_{14} \equiv 1; \\
2.\ F_4 \equiv X \wedge \overline{X}; & 7.\ F_{15} \equiv \overline{F}_3 \equiv \overline{X \wedge 1}; \\
3.\ F_5 \equiv X \wedge 1; & 8.\ F_{22} \equiv \overline{F}_6 \equiv \overline{X}; \\
4.\ F_6 \equiv X \equiv \overline{\overline{X}}; & 9.\ F_{23} \equiv \overline{F}_5 \equiv \overline{X \wedge 1}; \\
5.\ F_{13} \equiv \overline{X} \wedge 1; & 10.\ F_{24} \equiv \overline{F}_4 \equiv \overline{X \wedge \overline{X}}.
\end{array}
\tag{1.14}
$$

Таким образом, одноместные функции из Q_3^1 являются суперпозициями функций $Y_1 \div Y_4$.

2. Предположим, что $(n-1)$-местные функции вида $F : B_3^{n-1} \to B_3$ из Q_3^1 есть суперпозиции функций 0, 1, $\overline{X}$, $X_1 \wedge X_2$. Покажем, что всякая n-местная функция $F : B_3^n \to B_3$ есть суперпозиция этих же функций.

Разложим функцию $F(X) \in Q_3^1$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, по одной из координат согласно формуле (1.13). Очевидно, что в этом разложении используются лишь операции $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee X_2$, $\overline{X}$, константы 0, 1 и 2, а также $(n-1)$-местные функции, принадлежащие множеству Q_3^1. Эти функции, согласно допущению, есть суперпозиции функций 0, 1, $\overline{X}$, $X_1 \wedge X_2$. Кроме того, $\overline{2} = 0$, $X_1 \vee X_2 \equiv \overline{\overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2}$. Следовательно, функция F также является суперпозицией указанных функций. Легко видеть, что и всякая функция $F : B_3^n \to B_3^m$, принадлежащая Q_3^1, есть суперпозиция функций 0, 1, $\overline{X}$, $X_1 \wedge X_2$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Если функцию* $F(X) \in Q_3^1$ *последовательно разложить по всем* X_i $(i = 1, \ldots, n)$, *пользуясь формулой* (1.13), *а затем в разложении вычеркнуть конъюнктивные члены, содержащие* $X_i \wedge \wedge \overline{X}_i$, *то полученная таким образом функция* $F'(X)$ *обладает свойством*

$$F'(X) = F(X), \tag{1.15}$$

если $F(X) \neq 1$.

Доказательство теоремы следует из того, что $F(X^0) = F(X^2) = 0$ (или 2), когда $F(X^1) = 0$ (или 2), $X^\sigma = (X_1, \ldots, X_{i-1}, \sigma, X_{i+1}, \ldots, X_n)$, и поэтому, если в разложении (1.13) отбросить член $F(X^1) \wedge X_i \wedge \overline{X}_i$, то полученная таким образом функция будет принимать значение 0 (или 2), если $F(X) = 0$ (или 2). Подобные действия можно последовательно произвести по каждому из аргументов X_i.

Введем теперь множество I_3^1 функций вида $F: B_3^n \to B_3$, которые обладают свойством: $F(X) \neq 1$, если все $X_i \neq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. В множество I_3^1 будем включать также функции вида $F: B_3^n \to B_3^m$, у которых $F_j(X) \in I_3^1$, $j = 1, \ldots, m$.

Теорема 6. *Множество* I_3^1 *функционально замкнуто.*

Доказательство. Пусть $F: B_3^n \to B_3^m$; $\Phi: B_3^m \to B_3^s$, $F, \Phi \in I_3^1$. Тогда если среди координат точки X нет единиц, то их нет и среди координат точки $Y = F(X)$, а следовательно,— и среди координат точки $Z = \Phi(Y)$. Таким образом, $\Phi \circ F \in I_3^1$. Принадлежность к I_3^1 любой суперпозиции функций из I_3^1 следует из принадлежности к I_3^1 функции $Y \equiv X$ и функций вида $\Phi = (\Phi_1, \ldots \ldots, \Phi_m): B_3^n \to B_3^m$, $\Phi_i \in I_3^1$, $\Phi_i: B_3^n \to B_3$.

Заметим, что среди функций полной в Q_3^1 системы $H = \{0, 1, \overline{X}, X_1 \wedge X_2\}$ лишь одна функция $Y_2 \equiv 1$ не принадлежит множеству I_3^1. Отсюда следует, что система

$$H_1 = \{0, \overline{X}, X_1 \wedge X_2\} \tag{1.16}$$

является полной в множестве $P_3^1 = Q_3^1 \cap I_3^1$.

Замечание. Множества Q_3^1 и I_3^1 являются частными случаями более общих множеств Q_k^s и I_k^s, рассмотренных в работе [47]. Эти же множества с других точек зрения рассматривались в работах [6, 82].

§ 3. R-ФУНКЦИИ

Пусть $\mathfrak{X}$ — множество, содержащее не менее k элементов. Задание сюръекции вида $S: \mathfrak{X} \to B_k$, $B_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, приводит к разбиению множества $\mathfrak{X}$ на k подмножеств $\mathfrak{X}(i) = S^{-1}(i)$, $i \in B_k$, которые назовем **качественными градациями на** $\mathfrak{X}$, соответствующими сюръекции S. Будем говорить, что $x \in \mathfrak{X}$ обладает качеством i, если $x \in \mathfrak{X}(i)$. Введем также отображение $S^n : \mathfrak{X}^n \to B_k^n$, где $S^n(x) = (S(x_1), \ldots, S(x_n))$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Определение. Отображение $f : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^m$ называется **R-отображением,** если существует такая функция k-значной логики $F : B_k^n \to B_k^m$, которая вместе с f образует коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S^n"'] & \mathfrak{X}^m \arrow[d, "S^m"] \\ B_k^n \arrow[r, "F"'] & B_k^m \end{tikzcd} \tag{1.17}$$

или, другими словами, если

$$S^m \circ f = F \circ S^n. \tag{1.18}$$

Множество всех R-отображений обозначим $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$.

Функция k-значной логики $F : B_k^n \to B_k^m$, удовлетворяющая (1.18), называется **сопровождающей** для R-отображения f. Если $\mathfrak{X}$ — числовое множество, то R-отображения будем называть R-функциями (соответствующими сюръекции S).

Легко убедиться в том, что тождественное отображение $f(x) \equiv x$, $x \in \mathfrak{X}^n$, является R-отображением при любом выборе сюръекции S. Сопровождающей для него является функция $F(X) \equiv X$.

Пример 1. Среди функций обычных действительных аргументов имеются такие, знак которых вполне определяется заданием знаков аргументов. Так, для функций

$$u_1 = x_1 x_2 x_3 \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \varphi > 0;$$
$$u_2 = x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2};$$
$$u_3 = (2^{x_1 + x_2} + 0{,}5)\,[x_1^2 + (x_2 - 1)^2]; \tag{1.19}$$
$$u_4 = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2 x_3 + 2(x_2 + x_3)\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} + \\ + \sqrt{x_2^2 + x_3^2} + x_1 + x_2 + x_3$$

нетрудно получить таблицу

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4
—	—	—	—	—	+	—
—	—	+	+	—	+	+
—	+	—	+	+	+	+
—	+	+	—	+	+	+
+	—	—	+	+	+	+
+	—	+	—	+	+	+
+	+	—	—	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+

Если в этой таблице вместо — и + написать 0 и 1, то получим таблицы четырех булевых функций — сопровождающих для R-функций u_1,

u_2, u_3 и u_4 из множества $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$, где $\mathfrak{X} = \{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}$; $S^{-1}(0) = \mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0)$, $S^{-1}(1) = \mathfrak{X}(1)\ (0, +\infty)$. В отличие от функций (1.19) знак функций

$$v_1 = x_1x_2x_3 - 1,$$
$$v_2 = x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2},$$
$$v_3 = 2^{x_1+x_2} - 0{,}5 \sin x_1x_2, \ \ldots$$

зависит, вообще говоря, и от абсолютных значений их аргументов.

Пример 2. Если в примере 1 принять $\mathfrak{X} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, а сюръекцию $S : \mathbb{R} \to B_3$ определить формулой

$$S = S_3(x) = \begin{cases} 0, & \forall x \in (-\infty, 0), \\ 1, & x = 0, \\ 2, & \forall x \in (0, +\infty), \end{cases} \tag{1.20}$$

то среди функций (1.19) R-функциями будут u_1, u_2 и u_4. Например, функции u_2 соответствует функция трехзначной логики, определяемая таблицей

$S_3(x_1)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$S_3(x_2)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$S_3(u_2)$	0	1	2	1	1	2	2	2	2

Функция u_3 в этом случае не является R-функцией, так как если $S_3(x_1) = 1$, $S_3(x_2) = 2$, то $S_3(u_3) = 2$ при $x_2 \neq 1$ и $S_3(u_3) = 1$ при $x_2 = 1$.

Пример 3. Пусть $\mathfrak{X} \subset C^1(\mathbb{R})$ — множество строго монотонных дифференцируемых функций, $\mathfrak{X}(0)$, $\mathfrak{X}(1) \subset \mathfrak{X}$ — подмножества убывающих и возрастающих функций. Легко убедиться в том, что оператор $A : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}$ вида

$$Ax = \int_0^{x_1} \left(1 - \exp \prod_{i=2}^{n} x_i'(t)\right) dt,$$

$x_i(t) \in \mathfrak{X}$, $i = 1, \ldots, n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, является R-отображением (R-оператором) и ему соответствует булева функция $X_1 \sim (\overline{X_2 \sim \ldots \ldots \sim X_n})$.

Теорема 1. *Множество $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\varphi : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^m$, $\psi : \mathfrak{X}^m \to \mathfrak{X}^p$ — R-отображения из $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$. Составим для этих отображений коммутативные диаграммы (1.17) и соединим их в одну:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "S"] & \mathfrak{X}^m \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "S^m"] & \mathfrak{X}^p \arrow[d, "S^p"] \\ B_k^n \arrow[r, "\Phi"'] & B_k^m \arrow[r, "\Psi"'] & B_k^p \end{tikzcd} \tag{1.21}$$

где $\Phi : B_k^n \to B_k^m$ и $\Psi : B_k^m \to B_k^p$ — сопровождающие функции k-значной логики для φ и ψ соответственно. Из (1.21) вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^n & \xrightarrow{\psi\circ\varphi} & \mathfrak{X}^p \\ \downarrow S^n & & \downarrow S^p \\ B_k^n & \xrightarrow[\Psi\circ\Phi]{} & B_k^p \end{array}. \qquad (1.22)$$

Отсюда следует, что $\psi \circ \varphi$ есть R-отображение, для которого функция $\Psi \circ \Phi \in F(B_k)$ является сопровождающей.

Учитывая, что $(\varphi, \psi) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$, если $\varphi, \psi \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$, а тождественное отображение $y \equiv x$ всегда является R-отображением, приходим к выводу, что $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ замкнуто и относительно образования суперпозиций.

Из сказанного выше видно, что сопровождающая функция k-значной логики может быть получена путем формальной замены в рассматриваемой суперпозиции всех входящих в нее R-отображений соответствующими им сопровождающими функциями. Отсюда следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Если множество $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ замкнуто, то замкнуто и множество $\mathfrak{M}_1 \subset F(B_k)$ соответствующих сопровождающих функций.*

Нетрудно заметить, что одна и та же функция k-значной логики может оказаться сопровождающей для различных R-отображений. (Например, знак первой из функций (1.19) не зависит от выбора множителя $\varphi > 0$.) Бинарное отношение «иметь общую сопровождающую» является отношением эквивалентности, что приводит к разбиению множества $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ на классы, которые будем называть ветвями $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$. Учитывая, что ветвь вполне определяется заданием какого-либо своего R-отображения f или его сопровождающей функции F, будем обозначать ее $\mathfrak{R}(f)$ или $\mathfrak{R}(F)$. Следуя определению, данному в § 1, множество $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ назовем **замкнутым по признаку разбиения $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ на ветви,** если для всякой суперпозиции f R-отображений из $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}_1$ имеется R-отображение, принадлежащее той же ветви, что и f.

Для подмножеств $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$, замкнутых по признаку разбиения на ветви, справедлива теорема, более сильная, чем теорема 2.

Теорема 3. *Для того чтобы множество $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ было замкнуто по признаку разбиения $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ на ветви, необходимо и достаточно, чтобы было замкнуто множество $\mathfrak{M}_1 \subset F(B_k)$ соответствующих сопровождающих функций.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть H_1 — произвольная система функций из $\mathfrak{M}_1$, а $H \subset \mathfrak{M}_0$ — система R-отображений из соответствующих ветвей. Пусть F — какая-либо суперпозиция системы H_1, а f — соответствующая суперпозиция системы H (f может и не принадлежать $\mathfrak{M}_0$). Так как $\mathfrak{M}_0$ предполагается замкнутым по признаку разбиения $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ на ветви, то в $\mathfrak{M}_0$ есть R-отображение f_1, принадлежащее ветви $\mathfrak{R}(f)$. Сопровождающей для f_1 является F и, следовательно, $F \in \mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_1$ — замкнутое множество.

Достаточность. Пусть $H \subset \mathfrak{M}_0$ — произвольная система R-отображений, а f — суперпозиция системы H. Если F — суперпозиция соответствующей системы H_1 сопровождающих функций, то в силу замкнутости $\mathfrak{M}_1$ $F \in \mathfrak{M}_1$. Тогда по условию теоремы F является сопровождающей для некоторого R-отображения $\bar{f} \in \mathfrak{M}_0$. Так как f, $\bar{f}_1 \in \mathfrak{R}(F)$, то $\mathfrak{M}_0$ замкнуто по признаку разбиения $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ на ветви. Теорема доказана.

Определение. Система H называется **достаточно полной** (полной по признаку разбиения $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ на ветви) в $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$, если множество $\mathfrak{M}(H)$ всех H-реализуемых отображений имеет непустое пересечение с каждой ветвью $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$.

Другими словами, достаточная полнота H означает, что в каждой ветви $\mathfrak{R}(F)$ имеется по крайней мере одно R-отображение, которое может быть задано в виде единого аналитического выражения, записанного с помощью символов, введенных для системы H.

Следствием теоремы 3 является

Теорема 4. *Для того чтобы система $H \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$ была достаточно полной в множестве $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{X}, S)$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая система H_1 сопровождающих функций была полной в множестве $\mathfrak{M}_1 \subset F(B_k)$ сопровождающих $\mathfrak{M}$.*

Так как для замкнутых множеств функций k-значной логики существуют конечные полные системы (см. § 2), то согласно теореме 4 для соответствующих множеств R-отображений существуют конечные достаточно полные системы.

Замечание 1. В работе [44] рассмотрена более общая ситуация, когда допускается взаимное пересечение множеств $\mathfrak{X}(i)$ (т. е. $\mathfrak{X}(i)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, есть покрытие $\mathfrak{X}$). Доказанные теоремы сохраняются в силе и в этом случае. Однако для более углубленного изучения соответствующих R-отображений требуется привлечение теории многозначных отображений.

Замечание 2. Все сказанное верно и для случая, когда $k = \infty$, т. е. на $\mathfrak{X}$ вводится бесконечно много качественных градаций.

§ 4. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА R-ФУНКЦИЙ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДОСТАТОЧНО ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ R-ФУНКЦИЙ

В дальнейшем основное внимание уделяется следующим множествам R-функций.

1. $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}[\mathfrak{X} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty); S_2]$, где $S_2^{-1}(0) = \mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0)$, $S_2^{-1}(1) = \mathfrak{X}(1) = (0, +\infty)$. (В ранних работах по R-функциям [43] рассматривалась вся числовая ось $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, но 0 считался положительным и отрицательным числом одновременно.)

2. $\mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}[\mathfrak{X} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty); S_3]$, где $S_3^{-1}(0) = \mathfrak{X}(0) = (-\infty, 0)$, $S_3^{-1}(1) = \mathfrak{X}(1) = 0$, $S_3^{-1}(2) = \mathfrak{X}(2) = (0, \infty)$.

Названные множества R-функций используются ниже при построении уравнений сложных геометрических объектов и так называемых структур решений краевых задач. При этом применение множества $\mathbb{R}_2$, построенного без выделения числа 0 в отдельную качественную градацию, может оказаться недостаточным.

Дело в том, что к уравнению $\omega = 0$ границы $\partial\Omega$ области Ω обычно предъявляется требование, чтобы функция $\omega \in C(\mathbb{R}^n)$ была строго положительной внутри области Ω и строго отрицательной вне ее. Между тем одного факта, что область Ω определяется неравенством $\omega > 0$, а ω — везде непрерывная функция, вообще говоря, недостаточно для того, чтобы уравнение $\omega = 0$ было уравнением границы $\partial\Omega$. Более того, если замкнутая область $\Omega \cup \partial\Omega$ определяется неравенством $\omega \geqslant 0$, $\omega \in C(\mathbb{R}^n)$, то это не означает, что $\partial\Omega = (\omega = 0)$. Аналогичное явление имеет место при рассмотрении областей $\omega < 0$ и $\omega \leqslant 0$. Это вынуждает выделять 0 в отдельное множество и рассматривать R-функции, соответствующие функциям трехзначной логики.

Однако, как будет показано ниже, булева алгебра может быть все же в значительной степени сохранена в качестве рабочего аппарата. Это можно объяснить тем, что для приложений нужны не все R-функции, а лишь некоторое их подмножество, которому соответствуют функции трехзначной логики, близкие по свойствам к функциям булевой алгебры.

Изложим теперь соображения, приводящие к сужению множества $\mathfrak{R}_3$.

1. Для приложений естественным является требование непрерывности R-функций. Между тем не каждая ветвь множества $\mathfrak{R}_3$ содержит непрерывные R-функции. Действительно, пусть $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть R-функция, для которой сопровождающей является характеристическая функция $\varphi_1(X)$ (§ 2, п. 5), равная 0 при $X = 0$ и $X = 2$ и равная 2 при $X = 1$. Тогда $S_3[f(x)] = \varphi_1[S_3(x)]$. Следовательно, функция $f(x)$ отрицательна на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и положительна при $x = 0$, что исключает ее непрерывность при $x = 0$.

Так как множество $C(\mathbb{R}^n)$ везде непрерывных функций замкнуто, то по теореме 1 § 1 замкнутым является множество $Q = C \cap \mathfrak{R}_3$.

Теорема 1. *Множество функций трехзначной логики, сопровождающих для множества Q, есть множество Q_3^1, рассмотренное в § 2.*

Доказательство. Пусть функция $Y = F(X) \in F(B_3)$ — сопровождающая для R-функции $y = f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in Q$, а x^1 — точка пространства $\mathbb{R}^n$, среди координат которой есть нули. Не нарушая общности рассуждений, примем равными нулю первые s координат $x^1 = (0, \ldots, 0, x_{s+1}^1, \ldots, x_n^1)$. Тогда в ε-окрестности $B(x^1, \varepsilon) = \{\| x - x^1 \| < \varepsilon\}$ точки x^1 при $\varepsilon < \max\{|x_{s+1}^1|, \ldots, |x_n^1|\}$ координаты от $(s+1)$-й до n-й будут сохранять знаки, в то время как каждая из координат $x_1, \ldots, x_s$ может равняться нулю, быть положительной или отрицательной. Очевидно, что если точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ пробегает окрестность $B(x^1, \varepsilon)$, то соответствующая точка $X = (X_1, \ldots, X_n), X_i = S_3(x_i)$, имеет в качестве первых s координат всевозможные наборы нулей, единиц и двоек. Если R-функция $y = f(x)$ принимает в точке x^1 отличное от нуля значение, то она в силу своей непрерывности сохраняет знак и в некоторой окрестности точки x^1. Но тогда во всех упоминавшихся выше точках $X = (X_1, \ldots, X_n)$, соответствующих точкам окрестности $B(x^1, \varepsilon)$, сопровождающая функции $F(X)$ будет принимать то же значение (0 или 2), которое она принимает в точке X^1. Следовательно, $F(X) \in Q_3^1$.

Покажем теперь, что если $F(X) \in Q_3^1$, то в соответствующей ветви $\mathfrak{R}(F)$ множества $\mathfrak{R}_3$ есть непрерывные функции.

В п. 7 § 2 было показано, что система $H = \{0; 1; \overline{X}; X_1 \wedge X_2\}$ является полной в множестве Q_3^1. Нетрудно заметить, что функции $y_1 \equiv -1$, $y_2 \equiv 0$, $y_3 \equiv -x$, $y_4 \equiv \min(x_1, x_2)$ являются R-функциями, для которых функции $0, 1, \overline{X}, X_1 \wedge X_2$ являются сопровождающими. Представив функцию $F(X) \in Q_3^1$ в виде суперпозиции H и произведя формальную замену символов X_i на x_i, а символов функций системы H на соответствующие символы R-функций -1, 0, $-x$, $\min(x_1, x_2)$, получим непрерывную R-функцию, для которой $F(X)$ является сопровождающей.

Применив приведенное доказательство к каждой из функций $F_i(X): B_3^n \to B_3$, покажем, что сопровождающей для R-функции $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in Q$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, является функция $F(X) = \{F_1(X), \ldots, F_m(X)\}$, $f_i \in \mathfrak{R}(F_i)$, которая также принадлежит Q_3^1.

2. Перейдем к рассмотрению второго ограничения на множество $\mathfrak{R}_3$. Потребуем, чтобы задание знаков аргументов R-функции вполне определяло знак этой функции. Это означает, что точке $x \in \mathbb{R}^n$ среди координат которой нет нулей, R-функция $y = f(x)$: $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ должна ставить в соответствие отличное от нуля число. В общем случае для векторных R-функций вида $y = f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ это требование означает, что точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, должна соответствовать точка $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $y_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$. Множество R-функций, обладающих таким свойством, обозначим I.

Нетрудно заметить, что для сопровождающих функций трехзначной логики это требование равносильно требованию, чтобы каждой точке $X = (X_1, \ldots, X_n) \in B_3^n$, $X_i \neq 1$, $i = 1, \ldots, n$, соответствовала точка $Y = (Y_1, \ldots, Y_m) \in B_3^m$, $Y_j \neq 1$, $j = 1, \ldots, m$. Отсюда следует

Теорема 2. *Множество функций трехзначной логики, сопровождающих для множества I, есть множество $I_3^1 \subset F(B_3)$.*

3. Объединяя требования, сформулированные в п. 1 и 2, приходим к множеству $P = Q \cap I$, для которого сопровождающим является множество $P_3^1 = Q_3^1 \cap I_3^1$, рассмотренное в п. 7 § 2. Напомним, что полной в множестве P_3^1 является система

$$H_1 = \{0, \overline{X}, X_1 \wedge X_2\}, \tag{1.23}$$

где $\overline{X}$ и $X_1 \wedge X_2$ — соответственно отрицание и конъюнкция трехзначной логики. Введем для удобства следующие функции:

$$\begin{gathered} X_1 \vee X_2 \equiv \overline{\overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2}; \\ X_1 \sim X_2 \equiv (\overline{X}_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X}_2); \\ X_1 \to X_2 \equiv \overline{X}_1 \vee X_2; \\ X_1/X_2 \equiv \overline{X_1 \wedge X_2}. \end{gathered} \tag{1.24}$$

Эти функции назовем соответственно дизъюнкцией, равнозначностью, импликацией и операцией Шеффера трехзначной логики. Сохранение для функций (1.24) символов и наименований соответствующих булевых функций связано не только с идентичностью формул (1.6) и (1.24), но и со следующим свойством функций (1.24): если из таблиц этих функций вычеркнуть наборы аргументов, содержащие единицы, а в оставшихся строках заменить двойки единицами, то получим таблицы соответствующих булевых функций.

Так как функции (1.24) являются суперпозициями функций (1.23), принадлежащих множеству P_3^1, то в силу замкнутости P_3^1 они также принадлежат P_3^1. Это позволяет рассмотреть более широкую, чем (1.23), полную систему функций в P_3^1:

$$\begin{gathered} H_2 = \{0, \overline{X}, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, X_1 \sim X_2, \\ X_1 \to X_2, \quad X_1/X_2\}. \end{gathered} \tag{1.25}$$

Укажем еще одно ограничение, которое будем в ряде случаев накладывать на R-функции вида $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется 2^n областей, в каждой из которых все координаты точек отличны от нуля и сохраняют постоянные знаки. На плоскости $\mathbb{R}^2$ это четверти, в пространстве $\mathbb{R}^3$ — октанты. В общем случае эти области будем называть **координатными долями** пространства $\mathbb{R}^n$. Точки, среди координат которых есть нули, назовем **вырожденными.** Очевидно, если вырожденная точка x° имеет s координат, равных 0, то она является граничной для 2^s координатных долей. Эти координатные доли назовем соседними с точкой x°.

Если некоторая R-функция $f(x) : : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит множеству P и в вырожденной точке x° отлична от 0, то она в силу условия $P \subset Q$ во всех соседних с x° координатных долях имеет тот же знак, что в точке x°. Однако обратное утверждение неверно: функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ может принадлежать множеству P, иметь один и тот же знак во всех соседних с точкой x° координатных долях, а в точке x° — равняться 0. Примером является функция $y = \max(x, -x)$, которая положительна при $x \neq 0$ и равна 0 при $x = 0$.

В дальнейшем особый интерес будут представлять R-функции, принадлежащие множеству P, для которых указанное условие не выполняется. Множество всех таких функций, отображающих $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ при любом целом $n \geqslant 1$, обозначим P°, а множество соответствующих сопровождающих функций трехзначной логики — P_3^0.

Так как $P_3^0 \subset P_3^1$, то всякая функция P_3^0 является суперпозицией функций (1.23) или (1.25), однако среди суперпозиций этих функций есть и такие, которые P_3^0 не принадлежат. Примером является функция $X \vee \overline{X}$, сопровождающая для R-функции $\max(x, -x)$, упоминавшейся выше.

Из сказанного следует, что R-функция $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in P^\circ$, может равняться 0 лишь в точках, среди координат которых есть нули (т. е. в вырожденных точках), и при этом в соседних к ним координатных долях принимает значения разных знаков. Отсюда следует, что если $F(X): B_3^n \to B_3$ — сопровождающая для $f(x) \in P^\circ$ и $F(X) = 1$, то среди координат точки X есть единицы, а при всевозможной замене этих единиц нулями и двойками получатся точки, на которых $F(X)$ принимает значения как 0, так и 2.

Укажем критерий, гарантирующий принадлежность суперпозиций систем (1.23) или (1.25) множеству P_3^0.

Теорема 3. *Если $F(X): B_3^n \to B_3$, $X = (X_1, ..., X_n)$, есть суперпозиция функций (1.23) или (1.25), имеющая единственное вхождение каждой из координат X_i, то $F \in P_3^0$.*

(Примерами формул с единственным вхождением каждой координаты являются $F_1 = \overline{(X_1 \wedge (\overline{X}_2 \vee X_3))}$, $F_2 = (X_1 \to X_2) \sim (X_3 \vee \vee X_4)$. Формула $F_3 = (X_1 \wedge \overline{X}_2) \to X_1$ имеет двойное вхождение координаты X_1.)

Доказательство. Пусть $Z = F(X) = \Phi[\Psi_1(X^1), ..., \Psi_m(X^m)] = 1$, $X^i = (X_1^i, ..., X_{q_i}^i)$, $i = 1, ..., m$, $X = (X^1, ..., X^m) = (X_1^1, ..., X_{q_1}^1, X_1^2, ..., X_{q_2}^2, ..., X_1^m, ..., X_{q_m}^m)$, Φ, $\Psi_i \in P_3^0$, а среди координат точек X^i нет одинаковых.

Обозначим $Y_i = \Psi_i(X^i)$, $i = 1, ..., m$, $Y = (Y_1, ..., Y_m)$. Так как по условию $\Phi(Y) = 1$ и $\Phi \in P_3^0$, то существует такое множество индексов A, что $Y_i = 1$, если $i \in A$. Тогда из $Y_i = \Psi_i(X^i) \in \in P^\circ$ следует, что среди координат X_j^i точек X^i, $i \in A$, также есть единицы.

Пусть B — множество индексов j, для которых $X_j^i = 1$. Из $\Psi_i(X^i) \in P_3^0$ также следует существование таких точек X^{0i} и X^{2i}, получающихся заменой единичных координат точки X^i наборами нулей и двоек, что $\Psi_i(X^{0i}) = 0$ и $\Psi_i(X^{2i}) = 2$. Но тогда в силу независимости координат точек X^i существуют точки, получающиеся в результате замены единичных координат точки X наборами нулей и двоек, которым соответствуют всевозможные точки Y^s, получающиеся заменой единичных координат точки Y нулями и двойками. А так как $\Phi \in P_3^0$, то имеются точки, на которых функция $Z = F(X) = \Phi(Y)$ принимает значение как 0, так и 2. Следовательно, $F(X) \in P_3^0$. Выбирая в качестве функций Φ и Ψ_i функции (1.23) или (1.25), приходим к утверждению теоремы 3.

Вернемся к рассмотрению R-функций, принадлежащих множеству P^0, для которых P_3^0 является множеством сопровождающих функций трехзначной логики. Из теоремы 4 предыдущего параграфа следует, что система, состоящая из R-функций, будет достаточно полной в множестве P^0, если сопровождающей для нее будет система (1.23), (1.25) или любая другая полная в P_3^0 система функций трехзначной логики.

Приведем примеры некоторых достаточно полных в P^0 систем R-функций, для которых сопровождающей является система (1.25).

А. Система $\mathfrak{R}_\alpha$:

$$\begin{aligned}
&y_1 \equiv -1;\\
&y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x;\\
&y_3 \equiv x_1 \wedge_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}\right);\\
&y_4 \equiv x_1 \vee_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}\right);\\
&y_5 \equiv x_1 \sim_\alpha x_2 \equiv 2x_1x_2\left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (1+\alpha^2)x_1x_2} + \right.\\
&\left. + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}\right]^{-1};\\
&y_6 \equiv x_1 \to_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(x_2 - x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2}\right);\\
&y_7 \equiv x_1/_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} - x_1 - x_2\right),
\end{aligned} \tag{1.26}$$

где $\alpha = \alpha(x_1, x_2)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям

$$-1 < \alpha(x_1, x_2) \leqslant 1, \tag{1.27}$$

$$\alpha(x_1, x_2) \equiv \alpha(x_2, x_1) \equiv \alpha(\bar{x}_1, x_2) \equiv \alpha(x_1, \bar{x}_2).$$

В приложениях чаще всего полагают $\alpha \equiv 0$. Иногда бывает удобным считать α величиной, существенно зависящей от x_1, x_2 [47, 49].

При $\alpha \equiv 1$ система $\mathfrak{R}_\alpha$ становится особенно простой; например, для R-конъюнкции и R-дизъюнкции получаем

$$x_1 \wedge_1 x_2 \equiv \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|) \equiv \min(x_1, x_2),$$
$$x_1 \vee_1 x_2 \equiv \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) \equiv \max(x_1, x_2). \tag{1.28}$$

Б. Система $\mathfrak{R}_0^m$:

$$y_1 \equiv -1;$$
$$y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x;$$
$$y_3 \equiv x_1 \wedge_0^m x_2 \equiv (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}};$$
$$y_4 \equiv x_1 \vee_0^m x_2 \equiv (x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2})(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}}; \tag{1.29}$$
$$y_5 \equiv x_1 x_2;$$
$$y_6 \equiv x_1 \overset{m}{\underset{0}{\rightarrow}} x_2 \equiv (x_2 - x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2})(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}};$$
$$y_7 \equiv x_1 \overset{m}{\underset{0}{/}} x_2 \equiv (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}}.$$

В. Система $\underset{p}{\mathfrak{R}}$:

$$y_1 \equiv -1;$$
$$y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x;$$
$$y_3 \equiv x_1 \underset{p}{\wedge} x_2 \equiv x_1 + x_2 - [|x_1|^p + |x_2|^p]^{\frac{1}{p}};$$
$$y_4 \equiv x_1 \underset{p}{\vee} x_2 \equiv x_1 + x_2 + [|x_1|^p + |x_2|^p]^{\frac{1}{p}}; \tag{1.30}$$
$$y_5 \equiv x_1 \underset{p}{\sim} x_2 \equiv x_1 x_2 [|x_1|^p + |x_2|^p]^{-\frac{1}{p}};$$
$$y_6 \equiv x_1 \underset{p}{\rightarrow} x_2 \equiv x_1 - x_2 + [|x_1|^p + |x_2|^p]^{\frac{1}{p}};$$
$$y_7 \equiv x_1 \underset{p}{/} x_2 \equiv [|x_1|^p + |x_2|^p]^{\frac{1}{p}} - x_1 - x_2$$

при $p > 1$.

Пользуясь одной из приведенных выше достаточно полных систем, легко строить R-функции, принадлежащие заданным ветвям множеств P или P^0. Для этого достаточно в формуле $Y = F(X) = F(X_1, \ldots, X_n)$ для функции трёхзначной логики, определяющей ветвь и представленной в виде суперпозиции функций (1.25), произвести формальную замену символов $X_i \in B_2$ символами $x_i \in \mathbb{R}$, а символов операций $\overline{X}$, $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee X_2$, ... — символами соответствующих R-функций. При этом необходимо иметь в виду, что выбор системы R-функций влияет на их дифференциальные свойства. Например, при использовании системы $\mathfrak{R}_0^m$ обеспечивается принадлежность функций к множеству $C^m(\mathbb{R}^n)$. Однако при этом теряются некоторые качества (см. § 5, 12), которые присущи R-функциям, построенным с помощью систем (1.26) и (1.30).

Таким образом, в каждой ветви R-функций, принадлежащих множеству P, есть R-функции, дифференцируемые произвольно заданное число раз. Легко показать, что в каждой ветви множества P есть бесконечно дифференцируемые функции. Для построения таких R-функций достаточно, например, воспользоваться следующей достаточно полной в P системой:

$$\begin{aligned} &y_1 \equiv -1; \\ &y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x; \\ &y_3 \equiv x_1 \overset{\infty}{\wedge} x_2 \equiv \varphi(x_1)\varphi(x_2) - \varphi(\bar{x}_1) - \varphi(\bar{x}_2), \end{aligned} \tag{1.31}$$

где

$$\varphi(t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{up}\,(x-k).$$

(Определение и свойства функции up (x) приведены в гл. 3.)

Приведем также систему $\mathring{\mathfrak{R}}$:

$$\begin{aligned} &y_1 \equiv -1; \\ &y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x; \\ &y_3 \equiv x_1 \underset{n}{\overset{0}{\wedge}} x_2 \equiv \begin{cases} x_1x_2(x_1^n + x_2^n)^{-\frac{1}{n}}, & x_1 > 0, \quad x_2 > 0; \\ x_1\,, & x_1 \leqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0; \\ x_2\,, & x_1 > 0, \quad x_2 \leqslant 0; \\ (-1)^{n+1}(x_1^n + x_2^n)^{\frac{1}{n}}, & x_1 < 0, \quad x_2 < 0; \end{cases} \\ &y_4 \equiv x_1 \underset{n}{\overset{0}{\vee}} x_2 \equiv \left(\overline{\bar{x}_1 \underset{n}{\overset{0}{\wedge}} \bar{x}_n}\right), \end{aligned} \tag{1.32}$$

где $n \geqslant 2$ — целое, и систему $\mathfrak{R}_c$ полиномиальных сплайнов

$$\begin{aligned} &y_1 \equiv -1; \\ &y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x; \\ &y_3 \equiv x_1 \underset{c}{\overset{m}{\wedge}} x_2 \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^m \mathrm{sign}\,(x_1 + x_2)^{m+1} - \\ &- \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^m \mathrm{sign}\,(x_1 - x_2)^m; \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$y_4 \equiv x_1 \overset{m}{\underset{c}{\bigvee}} x_2 \equiv \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^m \operatorname{sign}(x_1+x_2)^{m+1} +$$

$$+\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^m \operatorname{sign}(x_1-x_2)^m.$$

Функции $x_1 \overset{m}{\underset{c}{\bigwedge}} x_2$ и $x_1 \overset{m}{\underset{c}{\bigvee}} x_2$ являются однородными полиномиальными сплайнами степени m с единственной линией стыковки (линией разрыва производных порядка m) $x_1 + (-1)^m x_2 = 0$.

4. Пусть $f(x) : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^m$ и существует такая функция k-значной логики $F : B_k^n \to B_k^m$, что диаграмма (1.17) коммутативна при условии $x \in G \subset \mathfrak{X}^n$, а вне G условие $S^m \circ f = F \circ S^n$ может и не выполняться. В этом случае f будем называть **условным R-отображением**, а функцию F — сопровождающей для f в G. Одно и то же отображение f может быть условным R-отображением по отношению к системе $\{G_i\}$ непересекающихся подмножеств $\mathfrak{X}^n$ с системой сопровождающих $\{F_i\}$, если в каждом из подмножеств G_i выполняется условие $S^m \circ f = F_i \circ S^n$.

Пример 1. Функции

$$x_1 \underset{x_3}{\cap} x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$x_1 \underset{x_3}{\cup} x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

являются R-функциями на плоскости $x_3 = 0$. Эти функции были использованы при решении пространственных контактных задач теории упругости [49].

Пример 2. Функция $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 + x_2 - x_3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ является R-конъюнкцией на плоскости $x_3 = 1$ и R-дизъюнкцией на плоскости $x_3 = -1$.

Операции $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\bigwedge}} x_2$, $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\bigvee}} x_2$ являются аналитическими функциями в точках (x_1, x_2) при $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$. Если равна 0 только одна из координат x_1 или x_2, то $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\bigwedge}} x_2, x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\bigvee}} x_2 \in C^n(\mathbb{R}^2)$. В точке (0, 0) эти функции непрерывны. Система $\overset{\circ}{\mathfrak{R}}$ обладает рядом достоинств, о которых говорится в дальнейшем.

Замечание. Для введенных R-операций будут применяться формулы сокращенной записи, например

$$\bigwedge_{i=1}^{i=n}{}_0\, a_i \equiv (\ldots((a_1 \wedge_0 a_2) \wedge_0 a_3) \wedge_0 \ldots) \wedge_0 a_n.$$

Скобки могут быть опущены лишь для ассоциативных R-операций (например, $\wedge_1$ и $\overset{\circ}{\underset{n}{\bigwedge}}$).

§ 3. ЛОГИЧЕСКИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА R-ФУНКЦИЙ

1. R-функции, входящие в достаточно полные системы (1.26) — (1.32), обладают рядом свойств, сходных со свойствами сопровождающих их функций трехзначной логики.

Предположим, что $\alpha \equiv \alpha(x_1, x_2) \equiv \alpha(x_2, x_1)$, $\alpha(-x_1, x_2) \equiv \equiv \alpha(x_1, x_2)$. Тогда справедливы следующие формулы:

1. $\bar{\bar{x}} \equiv x$;
2. $x_1 \wedge_\alpha x_2 \equiv x_2 \wedge_\alpha x_1$;
3. $x_1 \vee_\alpha x_2 \equiv x_2 \vee_\alpha x_1$;
4. $\overline{x_1 \wedge_\alpha x_2} \equiv \bar{x}_1 \vee_\alpha \bar{x}_2$;
5. $\overline{x_1 \vee_\alpha x_2} \equiv \bar{x}_1 \wedge_\alpha \bar{x}_2$;
6. $(x_1 \vee_\alpha x_2) + (x_1 \wedge_\alpha x_2) \equiv \dfrac{2}{1+\alpha}(x_1 + x_2)$;
7. $(x_1 \vee_\alpha x_2)(x_1 \wedge_\alpha x_2) \equiv \dfrac{2}{1+\alpha} x_1 x_2$;
8. $x_1 \wedge_\alpha x_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = 0$, $x_2 \geqslant 0$ или $x_2 = 0$, $x_1 \geqslant 0$;
9. $x_1 \vee_\alpha x_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = 0$, $x_2 \leqslant 0$ или $x_2 = 0$, $x_1 \leqslant 0$.

Нетрудно убедиться в том, что свойствами 1—5 и 8, 9 обладают также функции $x_1 \wedge_0^m x_2$, $x_1 \vee_0^m x_2$, $x_1 \underset{p}{\wedge} x_2$, $x_1 \underset{p}{\vee} x_2$, $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\wedge}} x_2$, $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\vee}} x_2$, $x_1 \overset{m}{\underset{c}{\wedge}} x_2$, $x_1 \overset{m}{\underset{c}{\vee}} x_2$, принадлежащие системам $\mathfrak{R}_0^m$, $\underset{p}{\mathfrak{R}}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{R}}$ и $\mathfrak{R}_c$. Функции $x_1 \wedge_1 x_2$ и $x_1 \vee_1 x_2$, в дополнение к свойствам 1—9, обладают также свойствами

10. $x \wedge_1 x \equiv x$;
11. $x \vee_1 x \equiv x$;
12. $x \wedge_1 \bar{x} \equiv -|x|$;
13. $x \vee_1 \bar{x} \equiv |x|$;
14. $x_1 \wedge_1 (x_2 \wedge_1 x_3) \equiv (x_1 \wedge_1 x_2) \wedge_1 x_3$;
15. $x_1 \vee_1 (x_2 \vee_1 x_3) \equiv (x_1 \vee_1 x_2) \vee_1 x_3$;
16. $x_1 \wedge_1 (x_2 \vee_1 x_3) \equiv (x_1 \wedge_1 x_2) \vee_1 (x_1 \wedge_1 x_3)$;
17. $x_1 \vee_1 (x_2 \wedge_1 x_3) \equiv (x_1 \vee x_2) \wedge_1 (x_1 \vee_1 x_3)$;
18. $(x_1 \wedge_1 x_2) \vee_1 x_1 \equiv x_1$;
19. $(x_1 \vee_1 x_2) \wedge_1 x_1 \equiv x_1$.

В § 2 приведены формулы для импликации, операции Шеффера и равнозначности. Аналогичные формулы верны и для соответствующих R-функций из приведенных выше достаточно полных систем (1.26) — (1.32). Например,

$$x_1 \to_0 x_2 \equiv \bar{x}_1 \vee_0 x_2; \quad x_1 \sim_0 x_2 \equiv (\bar{x}_1 \vee_0 x_2) \wedge_0 (x_1 \vee_0 \bar{x}_2)$$

и т. п.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что свойствами коммутативности 2, 3 и ассоциативности 14, 15 обладают также R-операции $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\wedge}} x_2$ и $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\vee}} x_2$ (1.32). Формулы эти можно использовать в качестве определяющих для введения других R-операций системы $\overset{\circ}{\mathfrak{R}}$:

$$x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\sim}} x_2 \equiv \left(\bar{x}_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\vee}} x_2\right) \overset{\circ}{\underset{n}{\wedge}} \left(x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\vee}} \bar{x}_2\right);$$

$$x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\to}} x_2 \equiv \left(\bar{x}_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\vee}} x_2\right); \tag{1.34}$$

$$x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{/}} x_2 \equiv \overline{\left(x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\wedge}} x_2\right)}.$$

2. R-функции, получающиеся при образовании суперпозиций достаточно полных систем (1.26), (1.30) и (1.32), кроме свойств, отмеченных выше, обладают рядом свойств дифференциального характера, которые будут использованы в § 11—13 данной главы и в гл. 2.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathfrak{R}_3$, а $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — произвольное достаточное число раз дифференцируемое отображение. Композиция $\varphi \circ \psi$ не является, вообще говоря, R-функцией. Однако, как будет показано ниже, на композицию $\varphi \circ \psi$ переносятся некоторые дифференциальные свойства отображения ψ.

Теорема 1. *Если* $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ *и*

$$\psi_1(x^0) = 0, \quad \psi_2(x^0) > 0, \tag{1.35}$$

то

$$|D^\gamma(\wedge_\alpha \circ \psi)|\big|_{x=x^0} = (D^\gamma \psi_1)\big|_{x=x^0} \text{ при } |\gamma| = 1, \tag{1.36}$$

где D^α *— оператор дифференцирования,* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *— обобщенный индекс,* $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Доказательство. Воспользовавшись формулой

$$\wedge_\alpha \circ \psi \equiv \psi_1 \wedge_\alpha \psi_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(\psi_1 + \psi_2 - \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 - 2\alpha\psi_1\psi_2}\right),$$

непосредственным дифференцированием находим

$$D^\gamma(\wedge_\alpha \circ \psi) = -\frac{1}{(1+\alpha)^2}\left(\psi_1 + \psi_2 - \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 - 2\alpha\psi_1\psi_2}\right) D^\gamma\alpha +$$

$$+\frac{1}{1+\alpha}[D^\gamma\psi_1 + D^\gamma\psi_2 - (\psi_1 D^\gamma\psi_1 + \psi_2 D^\gamma\psi_2 - \psi_1\psi_2 D^\gamma\alpha -$$

$$-\alpha\psi_2 D^\gamma\psi_1 - \alpha\psi_1 D^\gamma\psi_2)(\psi_1^2+\psi_2^2-2\alpha\psi_1\psi_2)^{-\frac{1}{2}}].$$

В силу условий (1.35) получаем при $x = x^\circ$

$$D^\gamma(\wedge_\alpha \circ \psi) = \frac{1}{1+\alpha}[D^\gamma\psi_1 + D^\gamma\psi_2 - (\psi_2 D^\gamma\psi_1 - \alpha\psi_2 D^\gamma\psi_1)\,|\psi_2|^{-1}] =$$

$$= \frac{1}{1+\alpha}[D^\gamma\psi_1 + \alpha D^\gamma\psi_1] = D^\gamma\psi_1.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если функция* $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условиям*

$$\psi_1(x^\circ) = 0, \quad \psi_2(x^\circ) < 0, \tag{1.37}$$

то при $|\gamma| = 1$ *справедливо равенство*

$$[D^\gamma(\vee_\alpha \circ \psi)]_{x=x^\circ} = (D^\gamma\psi_1)|_{x=x^\circ}. \tag{1.38}$$

Теорема 3. *Если функция* $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условиям*

$$\psi_1(x^\circ) = 0, \quad \psi_2(x^\circ) \neq 0, \tag{1.39}$$

то при $|\gamma| = 1$ *имеет место равенство*

$$D^\gamma(\sim_\alpha \circ \psi)|_{x=x^\circ} = (\operatorname{sign}\psi_2 \circ D^\gamma\psi_1)|_{x=x^\circ}. \tag{1.40}$$

Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично теореме 1.

Отметим очевидную формулу, справедливую для R-отрицания $\bar{x} \equiv -x$:

$$D^\gamma\bar{\psi} \equiv -D^\gamma\psi \equiv \overline{D^\gamma\psi}. \tag{1.41}$$

Пусть $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m) \in P^\circ$ есть суперпозиция функций $\bar{x}$, $x_1 \wedge_\alpha x_2$, $x_1 \vee_\alpha x_2$ с единственным вхождением каждого из аргументов x_i. Число операций отрицания над x_i и содержащими x_i частями формулы φ назовем **инверсной степенью** x_i. Так, например, в формуле $\varphi = \overline{x_1 \wedge_\alpha \overline{(x_2 \vee_\alpha x_3)}}$ x_1 имеет инверсную степень 1, x_2, x_3 — инверсную степень 2.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m) \in P^\circ$ *есть суперпозиция функций* — 1, $\bar{x}$, $x_1 \wedge_\alpha x_2$, $x_1 \vee_\alpha x_2$, *имеющая единственное вхождение* x_1 *с инверсной степенью* s, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — *непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая в точке* x° *условиям*

$$\psi_1(x^\circ) = 0, \quad \psi_i(x^\circ) \neq 0, \quad i = 2, 3, \ldots, m. \tag{1.42}$$

Тогда если

$$\varphi \circ \psi|_{x=x^\circ} = 0, \tag{1.43}$$

то при $|\gamma| = 1$ *справедливо равенство*

$$[D^{\gamma}(\varphi \circ \psi)]|_{x=x^{\circ}} = (-1)^{s}(D^{\gamma}\psi_1)|_{x=x^{\circ}}. \tag{1.44}$$

Доказательство. Применим запись $f^{[k]} = (-1)^k f$. Так как R-отрицание определяется формулой $\bar{x} \equiv -x$, то $f^{[k]}$ можно рассматривать как результат k-кратного применения этой операции к f.

Воспользовавшись формулой $x_1 \bigvee_{\alpha} x_2 \equiv \overline{\bar{x}_1 \bigwedge_{\alpha} \bar{x}_2}$, исключим из формулы $\varphi \circ \psi$ операцию $\bigvee_{\alpha}$. Тогда ввиду того, что ψ_1 имеет единственное вхождение в формулу $\varphi \circ \psi = \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_m)$, ее можно представить в виде

$$\varphi \circ \psi = ((\psi_1^{[k_1]} \bigwedge_{\alpha} p)^{[k_2]} \bigwedge_{\alpha} q)^{[k_3]},$$

где $p = p(\psi_2, \ldots, \psi_m)$, $q = q(\psi_2, \ldots, \psi_m)$ — некоторые выражения, не включающие ψ_1. Нетрудно видеть, что $s = k_1 + k_2 + k_3$.

Согласно (1.43)

$$[((\psi_1^{[k_1]} \bigwedge_{\alpha} p)^{[k_2]} \bigwedge_{\alpha} q)^{[k_3]}]|_{x=x^{\circ}} = 0. \tag{1.45}$$

Так как p и q получены путем применения операций R-конъюнкции $x_1 \bigwedge_{\alpha} x_2$ и R-отрицания $\bar{x}$ к функциям ψ_i $(i = 2, \ldots, m)$ и, возможно, к функции $y_1 \equiv -1$, то в силу условий (1.42) $p(x^{\circ}) \neq 0$, $q(x^{\circ}) \neq 0$. С другой стороны, из (1.45) и свойства 8 п. 1 следует

$$(\psi_1^{[k_1]} \bigwedge_{\alpha} p)|_{x=x^{\circ}} = 0, \tag{1.46}$$

$$q|_{x=x^{\circ}} > 0.$$

Отсюда в силу того же свойства 8

$$p|_{x=x^{\circ}} > 0. \tag{1.47}$$

На основании теоремы 1 в силу условий (1.46), (1,47) и формулы (1.41) получаем

$$\begin{aligned}[D^{\gamma}(\varphi \circ \psi)]|_{x=x^{\circ}} &= D^{\gamma}[(\psi_1^{[k_1]} \bigwedge_{\alpha} p)^{[k_2]} \bigwedge_{\alpha} q]^{[k_3]}|_{x=x^{\circ}} = \\ &= (-1)^{k_3} D^{\gamma}[(\psi_1^{[k_1]} \bigwedge_{\alpha} p)^{[k_2]} \bigwedge_{\alpha} q]|_{x=x^{\circ}} = \\ &= (-1)^{k_2+k_3}[D^{\gamma}(\psi_1^{[k_1]} \bigwedge_{\alpha} p)]|_{x=x^{\circ}} = (-1)^{k_2+k_3}[D^{\gamma}\psi_1^{[k_1]}]|_{x=x^{\circ}} = \\ &= (-1)^{k_1+k_2+k_3} D^{\gamma}\psi_1|_{x=x^{\circ}} = (-1)^{m} D^{\gamma}\psi_1|_{x=x^{\circ}},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Пусть* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m) \in P^{\circ}$ *есть суперпозиция R-функций* -1, $\bar{x}$, $x_1 \bigwedge_{\alpha} x_2$, $x_1 \bigvee_{\alpha} x_2$, $x_1 \to_{\alpha} x_2$, $x_1 \sim_{\alpha} x_2$, $x_1 /_{\alpha} x_2$, *имеющая единственное вхождение* x_1, *а* $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — *непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая в точке* $x = x^{\circ}$ *условиям*

$$\psi_1(x^{\circ}) = 0, \ \psi_i(x^{\circ}) \neq 0, \ i = 2, \ldots, m. \tag{1.48}$$

Тогда если $\varphi \circ \psi|_{x=x^{\circ}} = 0$, *то при* $|\gamma| = 1$ *справедливо равенство* (1.43), *где m — некоторое целое число.*

Доказательство. Воспользовавшись формулами

$$
\begin{aligned}
x_1 \vee_\alpha x_2 &\equiv \overline{\bar{x}_1 \wedge_\alpha \bar{x}_2}, \\
x_1 \to_\alpha x_2 &\equiv \bar{x}_1 \vee_\alpha x_2, \\
x_1 /_\alpha x_2 &\equiv \overline{x_1 \wedge_\alpha x_2},
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

исключим из суперпозиции $\varphi \circ \psi = \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_m)$ операции $x_1 \vee_\alpha x_2$, $x_1 \to_\alpha x_2$, $x_1/_\alpha x_2$. Тогда функцию $\varphi \circ \psi$ можно представить в виде

$$
\varphi \circ \psi = ((q_1 \sim_\alpha q_2)^{[k_1]} \wedge_\alpha q_3)^{[k_2]}, \tag{1.50}
$$

где лишь одна из функций q_1, q_2 или q_3 зависит от ψ_1.

Так как $\varphi \circ \psi = 0$ в точке x^0, то равна нулю в этой точке лишь та из функций q_1, q_2 или q_3, которая зависит от ψ_1. Остальные функции отличны от нуля в силу того, что суперпозиции R-функций из множества P^0 отображают знакоопределенные точки в знакоопределенные.

Пусть от ψ_1 зависит функция q_j, где j — одно из чисел 1, 2 или 3. Тогда из теорем 1 и 3 следует

$$
D^\gamma (\varphi \circ \psi)|_{x=x^0} = \pm D^\gamma q_j|_{x=x^0}. \tag{1.51}
$$

Если функция q_j не содержит операции $\sim_\alpha$, то к ней применима теорема 4 и тогда из (1.51) следует (1.44). В противном случае к q_j можно применить те же рассуждения, которые были применены к $\varphi \circ \psi$, и тем самым исключить из рассмотрения очередную операцию $\sim_\alpha$. В конечном итоге также приходим к формуле (1.44). Теорема доказана.

Для достаточно полной системы $\underset{p}{\mathfrak{R}}$ (1.30) справедливы теоремы, более общие, чем теоремы 1—5 для системы $\mathfrak{R}_\alpha$.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m) \in P^0$ *есть суперпозиция* R-*функций* — 1, $\bar{x}$, $x_1 \underset{p}{\wedge} x_2$, $x_1 \underset{p}{\vee} x_2$, $x_1 \underset{p}{\to} x_2$, $x_1 \underset{p}{\sim} x_2$, $x_1 \underset{p}{/} x_2$, *имеющая единственное вхождение аргумента* x_1, *а* $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in C^s(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условиям* (1.42), *тогда при* $p > s$ *для* $|\gamma| \leqslant s$ *выполняются условия*

$$
D^\gamma (\varphi \circ \psi)|_{x=x^0} = (-1)^m D^\gamma \psi_1|_{x=x^0}. \tag{1.52}
$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 5, исключим операции $x_1 \underset{p}{\vee} x_2$, $x_1 \underset{p}{\to} x_2$, $x_1/_p x_2$ и представим функцию $\varphi \circ \psi$ в виде

$$
\varphi \circ \psi = ((q_1 \underset{p}{\sim} q_2)^{[k_1]} \underset{p}{\wedge} q_3)^{[k_2]}. \tag{1.53}
$$

Так как по условию $\varphi \circ \psi = 0$ в точке x^0, то в этой точке либо $q_3 = 0$, $(q_1 \underset{p}{\sim} q_2)^{[k_1]} > 0$, либо $q_1 \underset{p}{\sim} q_2 = 0$, $q_3 > 0$. В первом случае

$$
(-1)^{k_1} (q_1 \underset{p}{\sim} q_2)] \underset{p}{\wedge} q_3 = [(-1)^{k_1} (q_1 \underset{p}{\sim} q_2)] + q_3 -
$$

$$-\left[|q_1 \underset{p}{\sim} q_2|^p + |q_3|^p\right]^{\frac{1}{p}} = |q_1 \underset{p}{\sim} q_2| + q_3 -$$

$$-|q_1 \underset{p}{\sim} q_2|\,[1 + O(q_3^\rho)] = q_3 + O(q_3^\rho). \tag{1.54}$$

Во втором случае (если, например, q_1 зависит от ψ_1)

$$q_1 \underset{p}{\sim} q_2 = q_1 q_2 \left[|q_1|^p + |q_2|^p\right]^{-\frac{1}{p}} = \pm q_1 + O(q_1^\rho). \tag{1.55}$$

Пусть $q^{(1)}$ есть та из компонент формулы (1.53), которая зависит от ψ_1. Тогда из (1.54) и (1.55) следует

$$\varphi \circ \psi = \pm q^{(1)} + O\left[(q^{(1)})^s\right]. \tag{1.56}$$

А так как в точке x° $q^{(1)} = 0$, то

$$D^\gamma (\varphi \circ \psi)|_{x=x^\circ} = (-1)^{m_1} D^\gamma q^{(1)}, \tag{1.57}$$

где m_1 — некоторое целое число. Представляя $q^{(1)}$ в форме (1.53) и повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$D^\gamma (\varphi \circ \psi)|_{x=x^\circ} = (-1)^{m_2} D^\gamma q^{(2)}, \tag{1.58}$$

где $q^{(2)}$ — суперпозиция, содержащая ψ_1, с меньшим числом операций, чем $q^{(1)}$. Повторяя этот процесс, через некоторое число шагов приходим к функции $q^{(r)} = \pm\psi_1$, а следовательно, и к формуле (1.52). Теорема доказана.

Теорема 7. *Теорема 6 справедлива для всякой системы R-функций*

$$H = \{-1;\ \ \bar{x};\ \ x_1 \wedge^* x_2;\ \ x_1 \vee^* x_2;\ \ x_1 \sim^* x_2;\ x_1 \to^* x_2;\ x_1 /^* x_2\}, \tag{1.59}$$

удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned}
&а)\ x_1 \wedge^* x_2 = x_i + o(x_i^s) && \text{при } x_j > 0, \quad (i \neq j);\\
&б)\ x_1 \vee^* x_2 = x_i + o(x_i^s) && \text{при } x_j < 0, \quad (i \neq j);\\
&в)\ x_1 \to^* x_2 = x_1 + o(x_1^s) && \text{при } x_2 > 0;\\
&г)\ x_1 /^* x_2 = -x_i + o(x_i^s) && \text{при } x_j > 0, \quad (i \neq j);\\
&д)\ x_1 \sim^* x_2 = x_i \operatorname{sign} x_j + o(x_i^s) && \text{при } x_j \neq 0, \quad (i \neq j).
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условиям последней теоремы удовлетворяют также функции $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\wedge}} x_2$, $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\vee}} x_2$, $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\to}} x_2$, $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{/}} x_2$, $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\sim}} x_2$, определяемые формулами (1.32) и (1.34), при $n \geqslant s$.

Теоремы 1—7 используются в дальнейшем при построении нормализованных уравнений сложных геометрических объектов и структур решений краевых задач.

Приведем некоторые результаты, касающиеся вторых производных от R-конъюнкций и R-дизъюнкций.

Лемма. *Если* $f(x_1, x_2) \equiv x_1 \wedge^* x_2 \in C^2$ $(x_1^2 + x_2^2 \neq 0)$ *удовлетворяет условиям*

$$S_3[f(x_1, x_2)] \equiv S_3(x_1) \wedge S_3(x_2), \tag{1.61}$$

$$f(tx_1, tx_2) \equiv tf(x_1, x_2), \tag{1.62}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \leqslant 0, \tag{1.63}$$

где $S_3(t) \equiv 1 + \operatorname{sign} t$, *то*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geqslant 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \geqslant 0. \tag{1.64}$$

Доказательство. Из (1.62) по известной теореме Эйлера получаем

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv f. \tag{1.65}$$

Продифференцируем тождество (1.65) по x_1 и x_2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \equiv -\frac{x_1}{x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \equiv -\frac{x_2}{x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}. \tag{1.66}$$

Отсюда

$$x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \equiv x_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}. \tag{1.67}$$

В силу условия (1.63) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \leqslant 0$. Из условия (1.61) следует, что $f = 0$ на положительных полуосях Ox_1, Ox_2 и $f > 0$ при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, а в остальных точках плоскости $f < 0$.

Из (1.65) следует

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1=0,\\ x_2 \geqslant 0}} = 0. \tag{1.68}$$

Согласно (1.66) при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \geqslant 0$. Поэтому $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ является возрастающей функцией x_1 и в силу (1.68) $\frac{\partial f}{\partial x_2} \geqslant 0$ в первой четверти. Во второй четверти $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \leqslant 0$, поэтому $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ убывает с ростом x_1 и в силу того же условия (1.68) $\frac{\partial f}{\partial x_2} \geqslant 0$ во второй четверти. Так как по доказанному $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \leqslant 0$, то $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ убывает с ростом x_2. А тогда $\frac{\partial f}{\partial x_2} \geqslant 0$ и при $x_2 < 0$. Аналогично находим, что $\frac{\partial f}{\partial x_1} \geqslant 0$.

Теорема 8. *Если функция* $f(x_1, x_2) \equiv x_1 \wedge^* x_2$ *удовлетворяет условиям леммы, а* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, *и*

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial l^2} \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \tag{1.69}$$

где l *— произвольное направление, то*

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} f(\varphi_1, \varphi_2) \leqslant 0. \tag{1.70}$$

Доказательство. Дифференцируя $f(\varphi_1, \varphi_2)$ дважды по l, получаем

$$\frac{\partial}{\partial l} f(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial l};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} f(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial l}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial l} \frac{\partial \varphi_2}{\partial l} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial l}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial l^2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial l^2}. \tag{1.71}$$

Так как $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \leqslant 0$, $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial l^2} \leqslant 0$, $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial l^2} \leqslant 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} \geqslant 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} \geqslant 0$, из последней формулы следует неравенство (1.70).

Пример. Покажем, что условиям теоремы 8 удовлетворяют рассмотренные выше R-конъюнкции $x_1 \wedge_\alpha x_2$ ($\alpha \equiv \text{const}$), $x_1 \underset{p}{\wedge} x_2$ ($p \geqslant 2$), $x_1 \overset{\circ}{\wedge} x_2$. Действительно,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x_1 \wedge_\alpha x_2) \equiv -\frac{x_2^2(1-\alpha)}{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2})^3} \leqslant 0;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x_1 \underset{p}{\wedge} x_2) \equiv -(p-1)\,[\,|x_1|^p + |x_2|^p]^{\frac{1}{p}-2} |x_1|^{p-2} |x_2|^p \leqslant 0; \tag{1.72}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(x_1 \overset{0}{\underset{n}{\wedge}} x_2\right) =$$

$$= \begin{cases} -(n+1)\, x_1^{n-1} x_2^{n+1} (x_1^n + x_2^n)^{-2-\frac{1}{n}} & \text{при } x_1 > 0, \quad x_2 > 0; \\ 0 & \text{при } x_1 \leqslant 0, \quad x_2 > 0 \\ & \text{и } x_1 > 0, \quad x_2 \leqslant 0; \\ (-1)^{n+1}(n-1)(x_1^n + n_2^n)^{\frac{1}{n}-2} x_1^{n-2} x_2^n & \text{при } x_1 < 0, \quad x_2 < 0 \end{cases}$$

и, следовательно, $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\wedge}} x_2\right) \leqslant 0$. Справедливость остальных условий теоремы 8 очевидна.

Следствие. Если $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial l^2} \leqslant 0$, то

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2}[(\ldots((\varphi_1 \wedge_{\alpha_1} \varphi_2) \wedge_{\alpha_2} \varphi_3) \wedge_{\alpha_3} \ldots) \wedge_{\alpha_{m-1}} \varphi_m] \leqslant 0, \quad (1.73)$$

где $|\alpha_i| < 1$. Неравенство сохраняется при замене символов $\wedge_{\alpha_i}$ символами $\underset{p}{\wedge}$ $(p \geqslant 2)$ или $\overset{0}{\underset{n}{\wedge}}$. При этом в силу коммутативности R-конъюнкции $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\wedge}} x_2$ при ее использовании не имеет значения порядок расположения открывающих и закрывающих скобок. Поэтому неравенство (1.73) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} \overset{\circ}{\underset{n}{\wedge}} \varphi_i \equiv \frac{\partial^2}{\partial l^2}\left(\varphi_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\wedge}} \cdots \overset{\circ}{\underset{n}{\wedge}} \varphi_m\right) \leqslant 0 \quad (1.74)$$

$$(1 \leqslant i \leqslant m).$$

Следующая теорема является двойственной теореме 8.

Теорема 9. *Если функция* $f(x_1, x_2) = x_1 \vee {}^*x_2$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, *удовлетворяет условиям*

$$S_3[f(x_1, x_2)] = S_3(x_1) \vee S_3(x_2),$$
$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2), \quad (1.75)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \geqslant 0,$$

а функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, *такова, что*

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial l^2} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.76)$$

где l *— произвольное направление, то*

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} f(\varphi_1, \varphi_2) \geqslant 0. \quad (1.77)$$

Легко убедиться в том, что условиям теоремы 9 удовлетворяют R-дизъюнкции $x_1 \vee_\alpha x_2$ $(\alpha \equiv \text{const})$, $x_1 \underset{p}{\vee} x_2$ $(p \geqslant 2)$, $x_1 \overset{\circ}{\underset{n}{\vee}} x_2$ $(n \geqslant 2)$.

§ 6. ЧЕРТЕЖ И ЕГО УРАВНЕНИЕ

1. В дальнейшем вместо часто употребляемых терминов «линия», «фигура», «поверхность», «тело», «гиперповерхность» и более общих, но длинных терминов «геометрический объект», «точечное множество» будем использовать термин «чертеж». На интуитивном уровне этот термин будем понимать, как «нечто в $\mathbb{R}^n$, имеющее форму». Точка является простейшим чертежом, и поэтому его можно было бы рассматривать как элемент множества $2^{\mathbb{R}^n}$ всех подмножеств $\mathbb{R}^n$. Однако при таком общем подходе пришлось бы рассматривать

в качестве «чертежей», например, множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\sin\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=0$; множество точек куба, расстояния которых от его вершин иррациональны, и т. д. О форме таких чертежей можно говорить лишь весьма условно. В дальнейшем произведена формализация понятия чертежа, исключающая подобного рода геометрические объекты из их числа. Но до тех пор никакие ограничения на это понятие не накладываются.

В аналитической геометрии обычно говорят о множествах точек в $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнениям вида $f(x)=0$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, где f — функция, принадлежащая некоторому достаточно общему множеству. В качестве такого множества часто рассматривают множество целых рациональных функций. Это приводит к так называемым **алгебраическим чертежам** (кривым, поверхностям и т. д.), к числу которых относятся прямые, окружности, эллипсы и т. д. в $\mathbb{R}^2$, плоскости, сферы, эллипсоиды, гиперболоиды и т. д. в $\mathbb{R}^3$.

В традиционных курсах аналитической геометрии, как правило, рассматриваются алгебраические кривые и поверхности второго порядка. Уравнениям высших степеней посвящена специальная литература [67].

В дальнейшем для простоты будем называть уравнение $f=0$ непрерывным, m раз дифференцируемым, аналитическим и т. д. в зависимости от того, является ли функция f непрерывной, m раз дифференцируемой, аналитической и т. д. Аналогично будем говорить о непрерывных, аналитических и других подобных неравенствах.

Нетрудно заметить, что упомянутое множество алгебраических чертежей является довольно бедным. Оно не содержит, например, квадрата, ломаной линии, усеченного конуса, не говоря уже о таком объекте, как, скажем, головка цилиндра двигателя внутреннего сгорания.

Если допустить, что уравнение $f(x)=0$ является непрерывным в $\mathbb{R}^n$, и не накладывать на него больше никаких ограничений, то получим излишне широкое множество геометрических объектов. Легко понять, что в этом случае уравнению $f(x)=0$ соответствует некоторое замкнутое множество точек в $\mathbb{R}^n$. Верно и обратное утверждение: для всякого замкнутого множества L может быть построено непрерывное уравнение. Его простейшим вариантом является уравнение

$$f(x)\equiv\inf_{y\in L}\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}=0, \tag{1.78}$$

которое назовем **нормальным уравнением** L [45].

Приведем цитату из известного курса лекций по аналитической геометрии П. С. Алаксандрова: «Каждый раз, когда определен какой-нибудь класс функций $F(x, y)$ или $F(x, y, z)$ соответственно от двух или трех переменных, можно определить посредством уравнений вида $F(x, y) = 0$ или $F(x, y, z) = 0$ и соответствующий класс линий на плоскости и поверхностей в пространстве. Так, например, можно рассматривать функции $F(x, y)$ и $F(x, y, z)$, имеющие частные производные по всем своим аргументам, вплоть до данного порядка k, можно рассматривать бесконечно дифференцируемые функции и т. д. Наиболее широким представляется класс линий и поверхностей, который получается, если от функций $F(x, y)$ и $F(x, y, z)$ не требовать ничего, кроме их непрерывности; однако этот класс оказывается слишком обширным...» [2, с. 393—394].

Но если для некоторого геометрического объекта можно написать непрерывное уравнение $f = 0$, то для него можно написать и бесконечно дифференцируемое уравнение $\varphi = 0$. Этот замечательный результат получен еще в 1932 г. известным математиком Х. Уитни [92]. Теорема Уитни в теории дифференцируемых многообразий рассматривается как хорошо известный факт [58, 91]. Однако несмотря на принципиальное значение этих результатов, они до самого последнего времени не были восприняты многими математиками, работающими в других областях. Об этом, в частности, свидетельствует приведенная выше цитата. Укажем также известного американского математика М. Х. Шульца [89], который при формулировке ряда своих теорем вводит излишнее предположение о том, что для рассматриваемых им замкнутых точечных множеств существуют бесконечно дифференцируемые уравнения. Между тем, из теоремы Уитни следует, что для *всякого* замкнутого множества существует бесконечно дифференцируемое уравнение и, таким образом, упомянутые теоремы Шульца следует считать более сильными, чем об этом предполагает сам автор.

На первый взгляд теорема Уитни может показаться противоречащей здравому смыслу, так как представления о бесконечно дифференцируемых уравнениях и таких чертежах, как квадрат, ломаная линия, куб и т. п., трудно ассоциируются. Чтобы обрисовать возникающую здесь ситуацию более наглядно, рассмотрим бесконечно дифференцируемое уравнение $f(x_1, x_2) = 0$ на плоскости x_1Ox_2. Функции $z = f(x_1, x_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ в пространстве x_1x_2Oz соответствует некоторая бесконечно гладкая поверхность S. Чертеж L, описываемый уравнением $f(x_1, x_2) = 0$, есть результат пересечения этой поверхности с плоскостью $z = 0$. Конечно, приходится преодолеть определенный психологический барьер, чтобы представить себе, как в результате пересечения бесконечно гладкой поверхности с плоскостью может получиться такая фигура, как, например, квадрат. А ведь по теореме Уитни в результате такого пересечения может получиться вообще любое замкнутое множество на плоскости.

2. Приведем простое доказательство теоремы Уитни, воспользовавшись функцией $\mathrm{up}(x)$ (см. гл. 3).

Теорема 1. *Для любого замкнутого множества* $S \subset \mathbb{R}^n$ *существует функция* $\omega(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\omega(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *такая, что* *а)* $\omega(x)=0$ *при* $x\in S$;

б) $\omega(x)>0$ *при* $x\in\mathbb{R}^n\setminus S$;

в) $|D^\alpha\omega(x)|<C(\alpha)$ *для всех* α, $x\in\mathbb{R}^n$;

г) $D^\alpha\omega(x)=0$ *для всех* α *при* $x\in S$.

Доказательство. Пусть S_ε — ε-окрестность замкнутого множества S:

$$S_\varepsilon=\{x:\rho(x,S)<\varepsilon\}.$$

Учтем, что

$$\sum_{k_i=-\infty}^{\infty}\operatorname{up}(2^m x_i-k_i)\equiv 1.$$

Отсюда следует тождество

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n}\prod_{i=1}^{n}\operatorname{up}(2^m x_i-k_i)\equiv 1,$$

где суммирование производится по всем целым k_i.

Оставим в этой сумме только те слагаемые, носители которых не пересекаются с S_ε при $\varepsilon=2^{-m}$, и назовем полученную функцию $\omega_m(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда функция

$$\omega(x)=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m^2}\omega_m(x)$$

обладает всеми требуемыми свойствами, причем

$$C(\alpha)=C2^{2|\alpha|^2},\quad |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n.$$

3. Естественное сужение множества бесконечно дифференцируемых функций — множество аналитических функций. Нетрудно, однако, показать, что соответствующее аналитическим уравнениям множество чертежей является излишне узким. Покажем, например, что этому множеству не принадлежит квадрат.

Рассмотрим квадрат с вершинами в точках $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a), $(0,a)$. Пусть 1) $f=0$ — аналитическое уравнение этого квадрата, 2) ρ — радиус сходимости ряда Тейлора функции f, построенного для точки $(0,0)$. Тогда при $x_1^2+x_2^2<\rho^2$

$$f(x)\equiv f(x_1,x_2)\equiv f(0,0)+\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2}x_2+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2}x_1^2+2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1\partial x_2}x_1x_2+\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_2^2}x_2^2\right]+\cdots$$

Полагая $x_2=0$, получаем

$$f(x)\big|_{x_2=0}\equiv f(x_1,0)\equiv f(0,0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f(0,0)}{\partial x_1^k}x_1^k,\quad |x_1|<\rho.\quad(1.79)$$

Так как функция $f(x)$ равна 0 в точках квадрата, то $f(x_1, 0) \equiv 0$ при $0 \leqslant x_1 < \rho$. Поэтому

$$f(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1^2} = \dots = 0.$$

Следовательно, согласно (1.79) $f(x_1, 0) \equiv 0$ вдоль интервала $(-\rho, \rho)$ оси абсцисс и, таким образом, чертеж, описываемый уравнением $f(x) = 0$, кроме точек квадрата включает в себя еще и точки интервала $(-\rho, 0)$ оси абсцисс. Поэтому уравнение $f(x) = 0$ не является уравнением квадрата. Приходим к противоречию.

4. Есть еще одно важное обстоятельство, которое влияет на выбор множества допустимых функций: необходимо, чтобы имелась возможность фактического построения уравнений рассматриваемых геометрических объектов.

Со времен Декарта такая задача самостоятельно ставилась и решалась лишь для небольшого числа наиболее простых геометрических форм — прямой, плоскости, окружности, конических сечений, сферы и некоторых других объектов. Между тем в математике и ее приложениях существует много различных задач, в которых требуется строить уравнения для геометрических объектов весьма сложного вида, например, расчет физических полей разной природы в сложных областях, оптимальный раскрой, геометрическая миниатюризация аппаратуры [72, 73], распознавание зрительных образов [69], нелинейное программирование и методы оптимизации и др.

Чтобы можно было фактически написать уравнение $f(x) = 0$ для данного геометрического объекта, необходимо точно определить, что означают слова «написать уравнение» и «данный геометрический объект». Для написания какого-нибудь конкретного уравнения вида $f(x) = 0$ надо, очевидно, располагать некоторой системой конструктивных средств для записи функции $f(x)$. Введенное в § 1 понятие H-реализуемой функции является достаточно хорошей для этой цели формализацией, и впредь, когда речь будет идти о построении какой-либо функции, будем подразумевать, что имеется некоторая базисная система H функций («операций»), для обозначения которых введена определенная символика, а рассматриваемые функции являются их суперпозициями.

Заметим, что среди упоминавшихся в настоящем параграфе функциональных множеств требованию H-реализуемости удовлетворяет лишь множество $\mathfrak{M}(H_0)$ целых рационапьных функций: каждая такая функция может быть представлена в виде суперпозиции $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a \ \forall a \in \mathbb{R}\}$. Соответствующее множеству $\mathfrak{M}(H_0)$ множество $\mathfrak{N}(H_0)$ алгебраических чертежей вполне определяется заданием базисной системы H_0 и, в конечном счете, все свойства алгебраических чертежей определяются свойствами системы H_0.

В ряде работ (см., например, [3]) используется понятие **полуалгебраического множества** (будем говорить «полуалгебраического чертежа»). К числу полуалгебраических относятся чертежи, точки которых удовлетворяют конечным системам алгебраических уравнений и неравенств, а также объединения конечного числа таких чертежей. Множество полуалегебраических чертежей обозначим $\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H_0)$.

Множество полуалгебраических чертежей $\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H_0)$ является существенно более широким, чем множество алгебраических. Например квадрат, ломаная линия, усеченный конус и т. п. уже при-

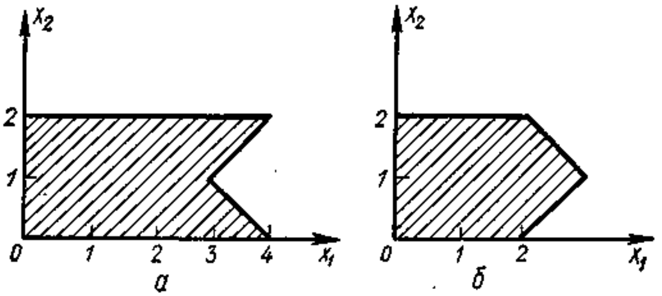

Рис. 2

надлежат множеству полуалгебраических чертежей. Однако то, что при таком подходе полуалгебраические чертежи задаются не единым уравнением вида $f(x) = 0$, а «системами систем» уравнений и неравенств, является серьезным конструктивным недостатком, проявляющимся во многих ситуациях, где требуется учет геометрической информации на аналитическом уровне. Такая традиционная фраза, применяемая при задании геометрических объектов, как, например, «фигура, ограниченная линиями $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_m = 0$», не является, вообще говоря, достаточно удачной. Так, если сказать: «пятиугольник задан уравнениями сторон $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_1 + x_2 = 4$; $x_1 - x_2 = 2$; $x_2 = 2$, то совершенно неясно, какой из пятиугольников, изображенных на рис. 2, имеется в виду. Такое задание нуждается в некоторых дополнительных комментариях (например, в указании о том, что многоугольник выпуклый, и т. п.), к которым трудно применить формальный математический аппарат.

Возникает вопрос: нельзя ли и такие чертежи, как полуалгебраические, задавать одним уравнением, подобно тому, как это можно делать для прямых, окружностей, эллипсоидов и других линий и поверхностей? Ясно, что решение этого вопроса можно искать лишь на пути расширения базисной системы $H_0 = \{x_1 + x_2,\ x_1x_2,\ a\ \forall a \in \in \mathbb{R}\}$.

На первый взгляд, этот путь кажется мало перспективным. Ведь если даже при использовании операций сложения, умножения и констант задача изучения соответствующих чертежей — алгебраических линий и поверхностей — оказалась весьма сложной, то насколько сложнее она станет, если добавить к сложению и умножению еще какие-нибудь операции! Однако, как увидит в дальнейшем читатель, дело совсем не безнадежно. Необходимо иметь в виду, что в рассматриваемой задаче речь идет не о предложении каких-либо новых средств для изучения чертежей, описываемых заданными уравнениями, а о том, чтобы строить уравнения для уже заданных чертежей.

Более широким конструктивно заданным множеством, чем множество $\mathfrak{M}(H_0)$ целых рациональных функций, является множество $\mathfrak{E} = \mathfrak{M}(H_e)$ элементарных функций — суперпозиций системы (1.1). Чертеж $L \subset \mathbb{R}^n$, определяемый элементарным уравнением $f(x) = 0$, $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{E}$, будем называть **элементарным чертежом.** Множество элементарных чертежей обозначим $\mathfrak{R}(H_e)$.

По аналогии с множеством полуалгебраических чертежей введем множество **полуэлементарных чертежей** $\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H_e)$, включающее точечные множества, удовлетворяющие системам элементарных уравнений и неравенств, и конечные объединения таких множеств. На плоскости, например, к числу полуэлементарных принадлежат не только чертежи, составленные из кусков алгебраических кривых, но и из кусков синусоид, тангенсоид, логарифмических и любых других элементарных кривых.

Может показаться, что по аналогии со множеством алгебраических чертежей $\mathfrak{R}(H_0)$, для которого множество полуалгебраических чертежей $\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H_0)$ оказалось существенно более широким, множество полуэлементарных чертежей $\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H_e)$ также шире множества элементарных чертежей $\mathfrak{R}(H_e)$. Ниже показано, что это не так: всякий полуэлементарный чертеж оказывается элементарным. Таким образом, $\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H_e) = \mathfrak{R}(H_e)$. В частности, это означает, что символов основных элементарных функций, арифметических операций и констант достаточно для того, чтобы написать, например, уравнение поверхности письменного стола или искусственного спутника Земли, если считать, что они ограничены кусками плоскостей, сфер, конусов, цилиндров и других известных элементарных поверхностей. (В крайнем случае можно аппроксимировать неизвестные поверхности известными.)

Рассуждения, проведенные для базисных систем H_0 и H_e, можно провести для любой другой базисной системы H. В итоге получим множества $\mathfrak{R}(H)$ H-реализуемых чертежей и $\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H)$ полу-H-реализуемых чертежей. При этом возможны две ситуации: а) $\mathfrak{R}(H) \subset \mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H)$ и, кроме того, имеются полу-H-реализуемые чертежи, не являющиеся H-реализуемыми; б) $\mathfrak{R}(H) = \mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H)$ — всякий полу-H-реализуемый чертеж является и H-реализуемым. Если имеет место случай «б», то базисную систему H будем называть **алгоритмически полной.** (Более точное формальное определение дано ниже.) Это название отражает тот факт, что с помощью символов, составляющих алгоритмически полную систему H, можно написать уравнение всякого чертежа, входящего в порождаемое системой H множество полу-H-реализуемых чертежей.

Примером алгоритмически неполной системы является $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1x_2, a \ \forall a \in \mathbb{R}\}$. Полноту системы H_s еще предстоит доказать.

Расширим несколько понятие алгоритмической полноты. Пусть, как и прежде, $\mathfrak{M}(H)$ — множество H-реализуемых чертежей. Геометрический объект S, определяемый неравенством $f \geqslant 0$, $f \in \mathfrak{M}(H)$, назовем **H-реализуемой областью.** Множество всех H-реализуемых областей обозначим $\mathfrak{G}(H)$. Чертеж $L_\varphi f = L \cap S$, $L = (f = 0)$, $S = (\varphi \geqslant 0)$, $f, \varphi \in \mathfrak{M}(H)$, назовем H-элементом чертежа L, выделяемым областью S. Нетрудно заметить, что упомянутые выше полу-H-реализуемые чертежи, составляющие множество $\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H)$, состоят из конечных объединений H-элементов.

Пусть $\mathfrak{P}(H, T)$ — множество, состоящее из конечных объединений H-элементов или чертежей, получающихся из H-элементов с использованием некоторого множества преобразований T. В частности, если $T = E$ — тождественное преобразование $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, то $\mathfrak{P}(H, T) = \mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H)$. Множество $\mathfrak{P}(H, T)$ назовем множеством **H-чертежей.** В дальнейшем, если не будет оговорено особо, будем считать, что T — множество преобразований переноса и поворота (конгруэнций), а соответствующее множество H-чертежей будем обозначать $\mathfrak{P}(H)$. Очевидно, что если базисная система H является расширением системы $H_0 = \{x_1 + x_2, x_1x_2, a \ \forall a \in \mathbb{R}\}$, то конгруэнтные между собой чертежи принадлежат или не принадлежат множеству $\mathfrak{P}(H)$ одновременно. Таким образом, в этом случае $\mathfrak{P}(H) = \mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H)$. В дальнейшем будем иметь в виду именно такие базисные системы. Это объясняется, в первую очередь, желанием сохранить в множестве H-чертежей широко встречающиеся в приложениях полуалгебраические чертежи.

Определение. Базисная система H, для которой выполняется условие

$$\mathfrak{P}(H, T) = \mathfrak{R}(H), \tag{1.80}$$

называется **алгоритмически полной** (по отношению к множеству преобразований T).

Ниже показано, что понятие алгоритмической полноты тесно связано с рассмотренным в предыдущих параграфах понятием достаточно полной системы R-функций.

5. Необходимо иметь в виду, что для одного и того же чертежа существует бесконечно много различных уравнений. Так, если $\omega(x) = 0$, $\omega(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, есть уравнение чертежа L, а $\Phi(x) \in$

$\in C(\mathbb{R}^n)$ — произвольная непрерывная функция, не равная нулю вне L, то уравнение $\varphi(x) = 0$, где $\varphi(x) = \omega(x)\,\Phi(x)$, также будет уравнением L. Уравнение $\omega(x)\,\Phi(x) = 0$ может рассматриваться как пучок уравнений чертежа L, из которого можно получить конкретные уравнения, выбирая некоторым образом функцию Φ — неопределенную компоненту пучка. Аналогично формула $u = \omega(x) \times \Phi(x)$ может рассматриваться как формула для пучка функций, равных нулю на чертеже L. Если принять, что неопределенная компонента $\Phi(x)$ этого пучка является непрерывной функцией, то множество $\mathfrak{U}$, к которому принадлежит функция u, будет вполне определяться заданием функции $\omega(x)$. Широта этого множества зависит от свойств функции $\omega(x)$. Рассмотрим, например, чертеж L, представляющий собой окружность радиуса R с центром в начале координат плоскости $\mathbb{R}^2$. Возьмем два варианта функции $\omega(x)$: $\omega_1(x) \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2$; $\omega_2(x) \equiv (R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2$. Тогда можно показать [77], что пучок $\mathfrak{U}_1$, определяемый формулой $u_1 = \omega_1\Phi_1$, $\Phi_1 \in C(\mathbb{R}^2)$, содержит множество $C_0^1(\mathbb{R}^2)$ непрерывно-дифференцируемых в $\mathbb{R}^2$ и равных нулю на L функций, а пучок $\mathfrak{U}_2$, определяемый формулой $u_2 = \omega_2\Phi_2$, $\Phi_2 \in C(\mathbb{R}^2)$, — не содержит. Например, в пучке $\mathfrak{U}_2$ не содержится функция $u = R^2 - x_1^2 - x_2^2$.

Для дальнейшего особый интерес представляет случай, когда $L = \partial\Omega$ есть кусочно-гладкая граница области Ω. При этом желательно построить такое уравнение $\omega(x) = 0$ границы $\partial\Omega$, которое удовлетворяет условиям

$$\omega(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega; \tag{1.81}$$

$$\omega(x) < 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega \cup \partial\Omega}; \tag{1.82}$$

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 1, \tag{1.83}$$

где ν — направление внутренней нормали к $\partial\Omega$. Предполагаем, что условие (1.83) выполняется во всех точках $\partial\Omega$, в которых направление нормали определено.

При выполнении условий (1.81)—(1.83) уравнение $\omega(x) = 0$ будем называть **нормализованным** (до первого порядка) уравнением $\partial\Omega$. Если дополнительно выполняются условия

$$\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial\nu^2}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial^3\omega}{\partial\nu^3}\right|_{\partial\Omega} = \cdots = \left.\frac{\partial^n\omega}{\partial\nu^n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad n \geqslant 2, \tag{1.84}$$

то уравнение $\omega(x) = 0$ назовем **нормализованным до n-го порядка.**

Существование бесконечно дифференцируемого нормализованного уравнения $\partial\Omega = (\omega = 0)$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая граница Ω. Тогда существует функция $\omega(x) \in C^\infty(\Omega \cup \partial\Omega)$ такая, что $\omega(x) = 0$ есть нормализованное до бесконечного порядка* *уравнение $\partial\Omega$ в каждой точке $x^\circ \in \partial\Omega$, в окрестности которой $\partial\Omega$ принадлежит классу C^1.*

Доказательство. Пусть $d(x) = \min\limits_{y\in\partial\Omega} \| x - y \|$ — нормальная функция границы $\partial\Omega$, а $\omega(x) = 0$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Тогда функция

$$\omega_1(x) = \begin{cases} p(x) \int\limits_\Omega d(y)\, \mathrm{up}\,[n,\ p(x)(x-y)]\, dy & \text{при } x \in \Omega; \\ 0 & \text{при } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.85}$$

где

$$p(x) = \exp\left[\frac{1}{\omega^2(x)}\right], \quad \mathrm{up}\,(n, x) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{up}\,(x_i), \tag{1.86}$$

удовлетворяет условиям теоремы 2.

§ 7. ТРЕХЗНАЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОБЛАСТЕЙ

1. Диаграммы Эйлера — Венна (см. рис. 1), построенные для булевых функций $\bar{X}$, $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee X_2$, $X_1 \sim X_2$, $X_1 \to X_2$ и X_1/X_2, могут служить также и для наглядного представления одноименных функций трехзначной логики. Различие состоит лишь в том, что внутренним точкам рассматриваемых областей ставится в соответствие число 2, внешним — 0, а граничным — 1.

Пусть Σ — некоторая область в $\mathbb{R}^n$. Обозначим той же буквой Σ функцию («трехзначный предикат»)

$$\Sigma = \Sigma(x) = \begin{cases} 2, & \forall x \in \Sigma, \\ 1, & \forall x \in \partial\Sigma, \\ 0, & \forall x \notin \Sigma \cup \partial\Sigma, \end{cases} \tag{1.87}$$

которую назовем **трехзначной характеристической функцией** области Σ.

Применив к Σ операцию трехзначного отрицания, получим предикат $\bar{\Sigma}$, которому будет соответствовать внешность области Σ (без ее граничных точек). Очевидно, что $\partial\Sigma = \partial\bar{\Sigma}$. Если $\Sigma_1 = \Sigma_1(x)$ и $\Sigma_2 = \Sigma_2(x)$ — трехзначные характеристические функции некоторых областей, то трехзначные предикаты

$$\Sigma_1 \wedge \Sigma_2, \quad \Sigma_1 \vee \Sigma_2, \quad \Sigma_1 \sim \Sigma_2, \quad \Sigma_1 \to \Sigma_2, \quad \Sigma_1/\Sigma_2 \tag{1.88}$$

также являются характеристическими функциями некоторых областей, а именно тех, которые отмечены штриховой линией на соответствующих диаграммах Эйлера — Венна (см. рис. 1). Заметим, что такое явление имеет место не для всякой функции $F(X_1, X_2)$ трехзначной логики. Так, например, функции $F(X_1, X_2)$, определяемой таблицей

X_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
X_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
F	0	1	0	1	1	0	2	0	0

соответствует трехзначный предикат $\Omega = F(\Sigma_1, \Sigma_2)$, который принимает значение 2 в точках области Ω и значение 1 на дугах ABC и ADC (рис. 3). Таким образом, условие $F(X_1, X_2) = 1$ не будет определять границу $\partial\Omega$. Характеристической функцией области Ω является функция $\Omega = \overline{\Sigma_1 \to \Sigma_2}$. То, что трехзначные предикаты (1.88) являются трехзначными характеристическими функциями соответствующих областей, изображенных на диаграммах Эйлера — Венна (см. рис. 1), следует из приведенной ниже теоремы.

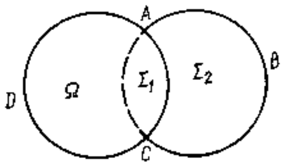

Рис. 3

Теорема. *Если Σ_i, $i = 1, \ldots, m$, — трехзначные характеристические функции некоторых областей, а $F(X) \in P_3^1$, $F : B_3^m \to B_3$, то трехзначный предикат*

$$\Omega = F(\Sigma), \quad \Sigma = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m), \tag{1.89}$$

является трехзначной характеристической функцией области Ω, определяемой предикатным уравнением

$$\Omega = F(\Sigma) = 2. \tag{1.90}$$

Доказательство. Пусть x° — граничная точка области Ω. Тогда, очевидно, x° является граничной точкой по крайней мере одной из областей Σ_i. Следовательно, в этой точке соответствующая характеристическая функция Σ_i равна 1. С другой стороны, в окрестности точки x° есть точки, в которых функция F принимает значения 2 и 0, причем этим точкам соответствуют значения аргументов Σ_i, получающиеся при замене аргументов, равных единице, нулями и двойками. Из принадлежности функции F множеству P_3^1 следует, что в точке $\Sigma^\circ = (\Sigma_1^\circ, \ldots, \Sigma_m^\circ) \in B_3^m$, соответствующей точке $x^\circ \in \mathbb{R}^n$, функция F равна 1. Следовательно, граничные точки области Ω удовлетворяют предикатному уравнению $F(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m) = 1$. Если x° — внешняя по отношению к Ω точка, то во всех невырожденных точках некоторой ее окрестности $F(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m) = 0$. А тогда и в точке x° $F(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m) = 0$. Теорема доказана.

Пусть $\{\Sigma_i\}$ — некоторая не обязательно конечная система областей, которые условно будем считать «простыми». Систему $\{\Sigma_i\}$ назовем **опорной** или **базисной.** Областям Σ_i соответствуют трехзначные характеристические функции $\Sigma_i : \mathbb{R}^n \to B_3$, $B_3 = \{0; 1; 2\}$. Тогда $\Sigma = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m)$ может рассматриваться как отображение $\Sigma : \mathbb{R}^n \to B_3^m$.

Для функции трехзначной логики $F(X) : B_3^m \to B_3$, $F(X) \in P_3^1$, составим композицию

$$\Omega = F \circ \Sigma = F(\Sigma). \tag{1.91}$$

Из доказанной выше теоремы следует, что Ω — трехзначная характеристическая функция области, определяемой предикатным уравнением $F(\Sigma) = 2$. Область Ω будем называть **сложной** областью, построенной с помощью простых областей $\Sigma_1, ..., \Sigma_m$ по правилу, определяемому логической формулой $F(\Sigma) = F(\Sigma_1, ..., \Sigma_m)$.

Пример. Пусть Σ_1, Σ_2 — круги радиусов R и r, $r < R$, с центром в начале координат плоскости $\mathbb{R}^2$, Σ_3 — вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = \pm a$, $r < a < R$, Σ_4 — область, расположенная выше биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 4), а $F = (X_1 \sim \overline{X}_2) \wedge (X_3/X_4)$. Тогда в соответствии с диаграммами Эйлера — Венна формула

$$\Omega = (\Sigma_1 \sim \overline{\Sigma}_2) \wedge (\Sigma_3/(\Sigma_4) \qquad (1.92)$$

определяет трехзначную характеристическую функцию сложной области Ω (на рис. 4. заштрихована).

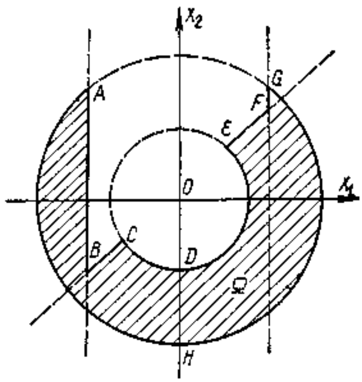

Рис. 4

Трехзначные характеристические функции вида (1.92) используются впоследствии как некоторая начальная формализация при задании сложных областей, играющая роль промежуточного этапа при построении их уравнений в обычном смысле. С этой точки зрения особый интерес представляет задача, обратная рассмотренной выше: дана сложная область Ω и требуется так выбрать опорные области $\Sigma_1, ..., \Sigma_m$ и функцию трехзначной логики $F(\Sigma_1, ..., \Sigma_m)$, чтобы формула $\Omega = F(\Sigma_1 ..., \Sigma_m)$ была трехзначной характеристической функцией области Ω.

Используя диаграммы Эйлера — Венна, эту задачу обычно удается решать без больших затруднений. Заметные трудности возникают лишь при создании формальных алгоритмов и программ для автоматизации процесса построения трехзначных характеристических функций сложных областей, принадлежащих тем или иным достаточно широким классам. Например, для многоугольных областей эта задача решена полностью. Существуют алгоритмы, по которым построение предикатов для многоугольных областей может быть выполнено автоматически по заданным последовательностям координат их вершин, выписанных в порядке их левого (или правого) обхода [47]. Ряд достаточно общих алгоритмов предложен для построения трехзначных характеристических функций областей, ограниченных дугами окружностей и отрезками прямых [79], и многогранников [75].

Заметим, что в силу формул (1.24) при построении трехзначных характеристических функций можно не пользоваться операциями $X_1 \to X_2$, $X_1 \sim X_2$, X_1/X_2. Так, например, вместо формулы (1.92) согласно (1.24) получаем

$$\Omega = [(\overline{\Sigma}_1 \wedge \Sigma_2) \vee (\Sigma_1 \wedge \overline{\Sigma}_2) \wedge (\overline{\Sigma_3 \wedge \Sigma_4}).$$

Эту формулу можно упростить. Из рис. 4 видно, что $\overline{\Sigma}_1 \wedge \Sigma_2 = 0$. Тогда, с учетом тождества $0 \vee F \equiv F$,

$$\Omega = (\Sigma_1 \wedge \overline{\Sigma}_2) \wedge (\overline{\Sigma_3 \wedge \Sigma_4}). \tag{1.93}$$

Обратим внимание на то, что если область Ω задать с помощью обычных операций пересечения и дополнения над множествами, получим формулу, идентичную формуле (1.93):

$$\Omega = (\Sigma_1 \cap \overline{\Sigma}_2) \cup (\overline{\Sigma_3 \cap \Sigma_4}). \tag{1.94}$$

Однако, если принять, что области $\Sigma_1 \div \Sigma_4$ замкнутые, то область Ω не будет содержать участка $ABCDEFG$ своей границы, а если области $\Sigma_1 \div \Sigma_4$ открытые, то область Ω не будет содержать участка AHG. Близость формул вида (1.93) и (1.94) позволяет использовать простые операции $\cap$, $\cup$, $^-$ над множествами для получения трехзначных характеристических функций. Однако в определенных ситуациях отмеченное выше незначительное расхождение в интерпретации формул (1.93) и (1.94) может привести к неточностям при переходе к уравнению границы $\partial\Omega$ в обычном смысле [45].

2. Примем в качестве канонического задание опорных замкнутых областей $\{\Sigma_i\}$ с помощью неравенств вида $\sigma_i \geqslant 0$, где σ_i — заданные H-реализуемые функции. В качестве базисной системы H будет выбираться система H_ε (1.1). Заметим, что из неравенства $\Sigma = (\sigma \geqslant 0)$ или $(\sigma > 0)$, вообще говоря, не следует $\partial\Sigma = (\sigma = 0)$. Так, например, если $\sigma = (a^2 - x_1^2 - x_2^2)(b^2 - x_1^2 - x_2^2)^2$, то при $b < a$ $(b > a)$ неравенство $\sigma \geqslant 0$ $(\sigma > 0)$ определяет замкнутый (открытый) круг, а уравнение $\sigma = 0$ есть уравнение двух концентрических окружностей. В общем случае могут встретиться и более сложные ситуации. Например, если $\sigma = [(a^2 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - b^2) - |(a^2 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - b^2)|]\ (x_1^2 + x_2^2 - b^2)$, $b < a$, то $\Sigma = (\sigma \geqslant 0)$ — круг радиуса a с центром в начале координат, а $\Sigma_1 = (\sigma = 0)$ — кольцеобразная область, ограниченная окружностями радиусов a и b.

Будем говорить, что σ — **простая непрерывная функция**, если $\sigma = 0$ — уравнение границы областей $\sigma \geqslant 0$ и $\sigma > 0$. В дальнейшем опорные области задаются с помощью простых непрерывных неравенств вида $\sigma_i \geqslant 0$. Трехзначную характеристическую функцию, соответствующую области $\Sigma = (\sigma \geqslant 0)$, обозначим тем же символом Σ.

Если $Y = F(X_1, \ldots, X_m) \in P_3^1$, то из приведенной выше теоремы следует, что трехзначный предикат

$$\Omega = F[(\sigma_1 \geqslant 0), \ldots, (\sigma_m \geqslant 0)] \tag{1.95}$$

для всяких простых непрерывных функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ может рассматриваться как трехзначная характеристическая функция некоторой (замкнутой) области Ω. Отсюда следует, что существует простая непрерывная функция ω, для которой $\Omega = (\omega \geqslant 0)$.

§ 8. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ. ПЕРЕХОД ОТ ПРЕДИКАТНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕРТЕЖЕЙ К ОБЫЧНЫМ

1. Пусть $\{\Sigma_i\}$ — система опорных областей в $\mathbb{R}^n$, заданных трехзначными характеристическими функциями

$$\Sigma_i = \begin{cases} 0, & \forall\, x \in (\sigma_i < 0), \\ 1, & \forall\, x \in (\sigma_i = 0), \\ 2, & \forall\, x \in (\sigma_i > 0), \end{cases} \tag{1.96}$$

где $\sigma_i \in C(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{M}(H)$. (Имеется в виду, что система $H \subset C(\mathbb{R}^n)$ базисных операций задана.)

Согласно теореме в § 7 из $F \in P_3^!$ следует, что

$$\Omega = F(\Sigma) = F(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m) \tag{1.97}$$

может рассматриваться как трехзначная характеристическая функция некоторой области Ω, определяемой условием $\Omega = 2$. Это означает, что граница $\partial\Omega$ этой области определяется условием $\Omega = 1$, а внешность $\bar{\Omega}$ — условием $\Omega = 0$. Уравнение

$$F(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m) = A \tag{1.98}$$

назовем **предикатным уравнением** области Ω (при $A = 2$), границы $\partial\Omega$ (при $A = 1$) и внешности $\bar{\Omega}$ (при $A = 1$).

Задача состоит в том, чтобы найти такую базисную систему $H_1 \supset H$, которая позволила бы переходить от предикатных уравнений чертежей к уравнениям вида $f = 0$, где f — известные H_1-реализуемые функции.

Введем обозначение

$$S_3(t) = 1 + \operatorname{sign} t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.99}$$

Тогда, если $f(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ есть R-функция, соответствующая разбиению Γ_3 числовой оси на множества $\mathfrak{X}(i) = [S_3(t) = i]$, $i \in B_3$, то согласно (1.18) для нее существует сопровождающая функция трехзначной логики $F: B_3^m \to B_3$ такая, что

$$S \circ f(x) = F \circ S_3(x), \tag{1.100}$$

где $S_3(x) = [S_3(x_1), \ldots, S_3(x_n)]$.

Теорема 1. *Если функция трехзначной логики $F: B_3^m \to B_3$ принадлежит множеству $Q_3^!$ функций, сопровождающих для множества $Q = C(\mathbb{R}^m) \cap \mathfrak{R}(\mathbb{R}^1, S_3)$ непрерывных R-функций, а $: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ — R-функция из Q, для которой F является сопровож-*

дающей, то предикатное уравнение

$$F[S_3(\sigma)] = F[S_3(\sigma_1), \ \ldots, \ S_3(\sigma_m)] = 1 \qquad (1.101)$$

описывает тот же чертеж, что и уравнение

$$f(\sigma) = f(\sigma_1, \ \ldots, \ \sigma_m) = 0. \qquad (1.102)$$

Доказательство. Из формул (1.100) и (1.101) получаем

$$S_3[f(\sigma)] = F[S_3(\sigma)] = 1. \qquad (1.103)$$

Тогда в силу (1.99) $1 + \operatorname{sign} f(\sigma) = 1$. Отсюда $\operatorname{sign} f(\sigma) = 0$, а следовательно, и $f(\sigma) = 0$. Теорема доказана.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 1 уравнение $f(\sigma) = 0$ необязательно является уравнением границы $\partial\Omega$ области $\Omega = [f(\sigma) \geqslant 0]$. Так, например, если $\Sigma_1 = (\sigma_1 \equiv |x_1| - x_1 \geqslant 0)$, $\Sigma_2 = (\sigma_2 \equiv 1 - x_1 \geqslant 0)$ — области на плоскости $\mathbb{R}^2$, а $\Omega = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, то при использовании R-конъюнкции $x_1 \wedge_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ предикатному уравнению $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2 = 1$ соответствует уравнение

$$\sigma_1 \wedge_0 \sigma_2 \equiv \sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \equiv$$
$$\equiv |x_1| - x_1 + 1 - x_1 - \sqrt{(|x_1| - x_1)^2 + (1 - x_1)^2} = 0,$$

которому удовлетворяют точки бесконечной полосы, заключенной между прямыми $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$, хотя границей области $\Omega = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ является прямая $x_1 = 1$.

В то же время, из доказательства теоремы 1 следует, что область Ω, определяемая предикатным неравенством

$$\Omega = F(\Sigma_1, \ \ldots, \ \Sigma_m) \geqslant 1, \qquad (1.104)$$

определяется также неравенством

$$\omega \equiv f(\sigma_1, \ \ldots, \ \sigma_m) \geqslant 0. \qquad (1.105)$$

Приведенные рассуждения показывают, что выполнения условий теоремы 1, вообще говоря, недостаточно для решения задачи построения уравнений границ сложных областей. В то же время, именно эти уравнения будут в дальнейшем представлять наибольший интерес. При их построении основную роль играет следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ — R-функция, для которой функция $F(X) : B_3^m \to B_3$, $F(X) \in P_3^1$, является сопровождающей. Тогда, каковы бы ни были простые непрерывные функции $\sigma_i(x)$: $:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, \ldots, m$, уравнению*

$$\omega(x) \equiv f(\sigma) \equiv f(\sigma_1, \ \ldots, \ \sigma_m) = 0 \qquad (1.106)$$

соответствует чертеж, не содержащий внутренних точек. (Множество P_3^1 рассмотрено в § 2, 7.)

Доказательство. Пусть $\omega(x^\circ) = 0$, $x^\circ \in \mathbb{R}^n$. Тогда согласно (1.100)

$$F\{S_3[\sigma_1(x^\circ)], \ldots, S_3[\sigma_m(x^\circ)]\} = S_3\{f[\sigma_1(x^\circ), \ldots$$
$$\ldots, \sigma_m(x^\circ]\} = S_3[\omega(x^\circ)] = 1. \qquad (1.107)$$

Так как $F \in P_3^1$, то из (1.107) следует, что среди чисел $S_3[\sigma_1(x^\circ)]$, ..., $S_3[\sigma_m(x^\circ)]$ есть единицы и согласно (1.99) соответствующие им числа $\sigma_i(x^\circ)$ равны нулю. Так как функции σ_i по условию теоремы являются простыми непрерывными, то в любой окрестности точки x° они принимают отличные от нуля значения. Из $F \in P_3^1$ следует, что $f \in P$ (см. § 7). Поэтому, если все аргументы функции f отличны от нуля, то и $f \neq 0$. Таким образом, в любой окрестности точки x° есть точки, в которых функция $\omega(x)$ отлична от нуля. Теорема доказана.

2. Предположим, что функция $F \in P_3^1$ (или Q_3^1), участвующая в формировании предикатного уравнения сложной области Ω (или ее границы $\partial\Omega$), задана аналитически с помощью некоторой полной в P_3^1 (или Q_3^1) системы функций. Это предположение не нарушает общности рассуждений, так как из теоремы 3 § 2 следует возможность представления всякой функции из Q_3^1 (а следовательно, и из $P_3^1 \subset Q_3^1$) в виде разложения по трехзначным функциям $Y_1 \equiv 0$, $Y_2 \equiv 1$, $Y_3 \equiv \bar{X}$, $Y_4 \equiv X_1 \wedge X_2$, $Y_5 \equiv X_1 \vee X_2$.

Располагая функцией $F \in P_3^1$ (или Q_3^1), легко построить R-функцию из соответствующей ей ветви. Для этого можно воспользоваться любой из достаточно полных систем R-функций (1.26), (1.28) — (1.32). Сам процесс построения R-функций выглядит следующим образом: в аналитическом представлении функций $F(X_1, \ldots, X_m)$ производится формальная замена символов функций трехзначной логики $\bar{X}$, $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee X_2$, $X_1 \to X_2$, ... соответствующими символами R-функций из выбранной достаточно полной системы и одновременно заменяются символы троичных аргументов X_i символами x_i непрерывных аргументов. (Вместо 0 и 1 из B_3 можно ставить — a^2 и 0, где $a \neq 0$.) То, что полученная таким путем функция $f(x) \equiv f(x_1, \ldots, x_m)$ является R-функцией с сопровождающей $F(X) \equiv F(X_1, \ldots, X_m)$, легко проверяется в соответствии с формулой (1.100).

Так как $P_3^1 \subset Q_3^1$, то выводы теоремы 1 верны для всех функций из P_3^1. Кроме того, если $F \subset P_3^1$, то применение формул (1.101), (1.102) приводит к чертежам, не содержащим внутренних точек $\mathbb{R}^n$. В обычных ситуациях такие чертежи являются границами некоторых областей. Исключение составляют различные случаи вырождения, о которых подробно сказано в работе [45].

Таким образом, формулы (1.101) и (1.102) определяют простое правило построения уравнений границ сложных областей: если сложная область Ω строится с помощью простых опорных областей

$\Sigma_i = (\sigma_i \geqslant 0)$, $i = 1, \ldots, m$, в соответствии с логической формулой $\Omega = F(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m)$, $F \in P_3^!$, и при этом $\partial\Sigma_i = (\sigma_i = 0)$, то для получения уравнения $\omega = 0$ границы $\partial\Omega$ достаточно в формуле $F(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m)$ произвести формальную замену символов логических операций соответствующими символами R-операций (из какой-нибудь достаточно полной системы), символов Σ_i — формулами σ_i, а затем полученную функцию $\omega(x) \equiv f[\sigma_1(x), \ldots, \sigma_m(x)]$ приравнять нулю.

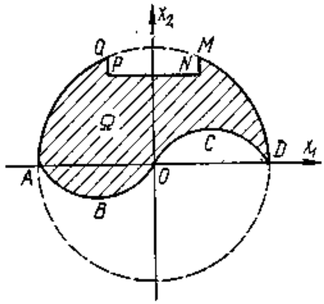

Рис. 5

Приведенные ниже примеры иллюстрируют эту методику.

Пример 1. Пусть требуется написать уравнение $\omega = 0$ границы прямоугольника Ω с вершинами в точках $(\pm a, \pm b)$. Этот прямоугольник может рассматриваться как пересечение вертикальной полосы $\Sigma_1 = (a^2 - x_1^2 \geqslant 0)$ и горизонтальной полосы $\Sigma_2 = (b^2 - x_2^2 \geqslant 0)$.

Для построения уравнения $\partial\Omega$ воспользуемся простейшей из R-конъюнкций: $x_1 \wedge_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Тогда в соответствии с описанным выше правилом получим

$$\partial\Omega = \{\omega(x_1, x_2) \equiv (a^2 - x_1^2) \wedge_0 (b^2 - x_2^2) = 0\}. \tag{1.108}$$

Отсюда

$$\omega \equiv a^2 - x_1^2 + b^2 - x_2^2 - \sqrt{(a^2 - x_1^2)^2 + (b^2 - x_2^2)^2} = 0. \tag{1.109}$$

Нетрудно показать, что семейство линий $\omega(x_1, x_2) = C$, включающее при $C = 0$ прямоугольник, состоит из выпуклых кривых. Действительно, если l — произвольное направление, то

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2}(a^2 - x_1^2) = -2\cos^2(l, Ox_1) \leqslant 0;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2}(b^2 - x_2^2) = -2\cos^2(l, Ox_2) \leqslant 0.$$

Тогда в силу теоремы 8 § 5 и первой из формул (1.72) получаем

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial l^2} = \frac{\partial^2}{\partial l^2}[(a^2 - x_1^2) \wedge_0 (b^2 - x_2^2)] \leqslant 0.$$

Отсюда следует выпуклость поверхности $x_3 = \omega(x_1, x_2)$, а значит, и выпуклость ее линий уровня $\omega(x_1, x_2) = \text{const}$. К аналогичному результату придем и в случае, если рассматриваемая область — пересечение нескольких областей $\Sigma_i = (\sigma_i \geqslant 0)$ и при этом $\frac{\partial^2}{\partial l^2}\sigma_i \leqslant 0$.

Пример 2. Пусть требуется написать уравнение границы области Ω, изображенной на рис. 5, где $ABOCD$ — дуга синусоиды, амплитуда которой равна b; $OD = R$; DM и QA — дуги окружности радиуса R, точка N имеет координаты (a, h), а точка P симметрична ей относительно оси Ox_2. В качестве опорных областей выберем следующие:

$\Sigma_1 = \left(x_2 - b\sin\frac{\pi x_1}{R} \geqslant 0\right)$ — часть плоскости, расположенная выше синусоиды;

$\Sigma_2 = (R^2 - x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0)$ — круг радиуса R с центром в начале координат;

$\Sigma_3 = (a^2 - x_1^2 \geqslant 0)$ — вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x_1 = \pm a$;

$\Sigma_4 = (x_2 - h \geqslant 0)$ — часть плоскости, расположенная выше горизонтальной прямой $x_2 = h$.

Используя диаграммы Эйлера — Венна, легко находим, что область Ω может быть определена формулой

$$\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2 \wedge (\overline{\Sigma_3 \wedge \Sigma_4}).$$

Соответствующее уравнение $\partial\Omega$ имеет вид

$$\partial\Omega = \left\{\omega \equiv \left[\left(x_2 - b\sin\frac{\pi x_1}{R}\right) \wedge_0 (R^2 - x_1^2 - x_2^2)\right] \wedge_0 \wedge_0 \overline{[(a^2 - x_1^2) \wedge_0 (x_2 - h)]} = 0\right\}. \tag{1.110}$$

Как и в предыдущем примере, от символов R-операций $x_1 \wedge_0 x_2$ и x в этом уравнении можно избавиться, и в результате получим уравнение $\omega = 0$, где ω будет иметь привычный вид элементарной функции. Однако на практике исключать символы R-операций нет необходимости, гораздо проще «привыкнуть» к ним и включить их в математический обиход, подобно тому, как это происходило со всеми другими символами операций в процессе развития математики.

Замечание. В работе [45] рассмотрены различные особые ситуации, которые могут возникнуть при построении уравнений границ областей сложной формы (появление точек недифференцируемости внутри или вне области, образование «оврагов» и т. п.). Учет таких особенностей имеет важное значение при построении приближенных решений краевых задач.

§ 9. УРАВНЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕРТЕЖА. АЛГОРИТМИЧЕСКИ ПОЛНЫЕ БАЗИСНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть $H_0 = \{x_1 + x_2,\ x_1x_2,\ a\ \forall a \in \mathbb{R}\}$ $(H = \{H_0,\ \varphi_i,\ i \in I\}$, I — некоторое множество индексов) — расширение системы H_0, $\mathfrak{M}(H)$ — множество H-реализуемых функций, а $\mathfrak{R}(H) = \{L \in 2^{\mathbb{R}^n} : L = \ker f,\ f \in \mathfrak{M}(H)\}$ — множество H-реализуемых в $\mathbb{R}^n$ чертежей. Будем предполагать, что множество $\mathfrak{M}(H)$ содержит одну из достаточно полных систем R-функций из $\mathfrak{R}(\mathbb{R}^1, S_3)$. В § 6 полу-

H-реализуемые чертежи были определены как объединения

$$L = \bigcup_{i=1}^{m} L_i, \tag{1.111}$$

$$L_i = \{x \in R^n : \sigma_{ki}(x) \geqslant 0,\ \tau_{si}(x) = 0,\ \forall (k, s) \in I_1 \times I_2\}, \tag{1.112}$$

где σ_{ki}, $\tau_{si} \in \mathfrak{M}(H)$, а I_1, I_2 — конечные (возможно, и пустые) множества индексов. Множество всех полу-H-реализуемых чертежей обозначается $\mathfrak{N}_{\frac{1}{2}}(H)$. Чертежи L_i, определяемые конечными системами уравнений и неравенств (1.112), назовем **элементами** чертежа L.

Пусть

$$\Sigma_i = \bigwedge_{k \in I_1} \Sigma_{ki}, \tag{1.113}$$

где $\Sigma_{ki} = [\sigma_{ki}(x) \geqslant 0]$ — трехзначные характеристические функции соответствующих областей. Тогда согласно формулам (1.104), (1.105) систему неравенств $[\sigma_{ki}(x) \geqslant 0]$, $k \in I_1$, можно заменить одним неравенством

$$\sigma_i(x) \equiv \bigwedge_{k \in I^1}{}^{q_k} \sigma_{ki}(x) \equiv ((\ldots (\sigma_{k_1 i}(x) \wedge^{q_1} \sigma_{k_2 i}(x)) \wedge^{q_2} \ldots) \wedge^{q_m} \sigma_{k_m i}) \geqslant 0, \tag{1.114}$$

$$\left(I_1 = \bigcup_{j=1}^{m} k_j\right),$$

где $\wedge^{q_j}$ — символ какой-либо из R-конъюнкций (например, $\wedge^{q_j} = \wedge_0$, $\wedge_0^m$, ...) из $\mathfrak{M}(H)$. Систему уравнений $\tau_{si}(x) = 0$, $s \in I_2$, также можно заменить одним неравенством

$$\tau_i(x) \equiv -\sqrt{\sum_{s \in I_2} \tau_{si}^2(x)} \geqslant 0, \tag{1.115}$$

которое, очевидно, удовлетворяется тогда и только тогда, когда $x \in \bigcap T_{si}$, $s \in I_2$, где $T_{si} = [\tau_{si}(x) = 0]$. Таким образом, элемент L_i определяется двумя неравенствами, $\sigma_i(x) \geqslant 0$ и $\tau_i(x) \geqslant 0$, которые с помощью какой-либо из R-конъюнкций $\wedge^*$ можно свернуть в одно:

$$l_i(x) \equiv \sigma_i(x) \wedge^* \tau_i(x) \geqslant 0. \tag{1.116}$$

Согласно (1.115) строгое неравенство $\tau_i(x) > 0$ не выполняется ни в одной точке $\mathbb{R}^n$. Учитывая, что $\sigma_i \wedge^* \tau_i > 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma_i > 0$ и $\tau_i > 0$, приходим к выводу, что в (1.116) можно заменить знак $\geqslant$ знаком $=$. В результате получим уравнение элемента L_i

$$l_i(x) \equiv \sigma_i(x) \wedge^* \tau_i(x) = 0. \tag{1.117}$$

При этом $l_i < 0$ вне L_i. Применяя к (1.117) операцию R-отрицания и формулу $\overline{x_1 \wedge^* x_2} \equiv \bar{x}_1 \vee^* \bar{x}_2$ (см. § 5), а затем, извлекая из не-отрицательной величины — l_i квадратный корень, с учетом (1.115) приходим к уравнению

$$\omega_i \equiv \sqrt{\left(\sum_{s\in I_i} \tau_{si}^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \vee^* \overline{\sigma_i(x)}} = 0, \tag{1.118}$$

где $\vee^*$ — символ какой-либо R-дизъюнкции из $\mathfrak{M}(H)$. Уравнение элемента L_i в форме (1.118) обладает некоторыми свойствами дифференциального характера, о которых будет сказано в § 10.

Располагая уравнениями $\omega_i(x) = 0$, $\omega_i \in \mathfrak{M}(H)$, элементов L_i полу-H-реализуемого чертежа L, уравнение L представим в виде

$$\omega(x) \equiv \bigwedge_{i=1}^{i=m}{}^* \omega_i(x) = 0. \tag{1.119}$$

Можно также воспользоваться формулой

$$\omega(x) \equiv \prod_{i=1}^{m} \omega_i(x) = 0. \tag{1.120}$$

(В некоторых случаях (см. § 10) формула (1.119) оказывается более предпочтительной.)

Таким образом, если базисная система $H = \{H_0, \varphi_i, i \in I\}$ содержит одну из достаточно полных систем R-функций из $\mathfrak{R}_3(\mathbb{R}^1, S_3)$, то всякий полу-$H$-реализуемый чертеж является H-реализуемым.

Пусть $y = f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — некоторая биекция, такая, что $x = f^{-1}(y) \in \mathfrak{M}(H)$. Тогда уравнение

$$\omega_1(x) \equiv \omega_1[f^{-1}(y)] = 0$$

является, очевидно, уравнением образа $L_1 = f(L)$ чертежа L при преобразовании f и при этом $\omega_1 \in \mathfrak{M}(H)$. Таким образом, если T — группа биекций указанного вида, а $P\{\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H), T\}$ — множество образов полу-H-реализуемых чертежей, соответствующих преобразованиям из T, то для всякого $L_1 \in P\{\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H), T\}$ можно написать уравнение $\omega_1(x) = 0, \omega_1 \in \mathfrak{M}(H)$. Следовательно, $P\{\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H), T\} = \mathfrak{R}(H)$. Тогда в соответствии с определением алгоритмической полноты H (см. § 6) приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Если система $H = \{H_0, \varphi_i, i \in I\}$ такова, что множество $\mathfrak{M}(H)$ H-реализуемых функций содержит какую-либо из достаточно полных систем R-функций из $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, S_3)$, то она алгоритмически полная.

Следствие. Базисная система H_e (1.1), состоящая из арифметических операций, основных элементарных функций и констант, является алгоритмически полной. Это обусловлено существованием элементарных достаточно полных систем.

Нетрудно заметить, что элементы $L_i \in \mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}(H)$ могут иметь любую размерность от 0 до n. Так, если $I_2 = \varnothing$, а $\sigma_i \equiv \sigma$, то $\tau_i \equiv 0$

и из формулы (1.117) получаем **уравнение области** $\Sigma = [\sigma(x) = 0]$

$$l_i(x) \equiv 0 \wedge^* \sigma(x) = 0. \qquad (1.121)$$

В частности, если $\wedge^* = \wedge_0^m$, уравнение (1.121) имеет вид

$$l_i(x) \equiv [\sigma(x) - |\sigma(x)|]\,|\sigma(x)|^m = 0, \qquad (1.122)$$

при этом $l_i \in C^m(\mathbb{R}^n)$.

Уравнение элемента гиперповерхности $f = 0$, выделяемого областью $\varphi \geqslant 0$, согласно (1.118) можем представить в виде

$$\omega \equiv \sqrt{f^2 \vee^* \varphi} = 0. \qquad (1.123)$$

Формула (1.123) неоднократно используется в гл. II при построении структур решений краевых задач.

Замечание 1. Описанная выше методика построения уравнений сложных чертежей позволяет в ряде случаев автоматизировать процесс составления уравнений. Нетрудно видеть, что автоматизировать необходимо лишь процесс построения предикатов, а переход к соответствующим уравнениям выполняется формально заменой символов функций алгебры логики соответствующими символами R-операций. Вопросам автоматизации построения уравнений и связанным с ними исследованиям по k-значной логике посвящены работы [47, 79].

Замечание 2. Если $\sigma_{ki}, \tau_{si} \in \mathfrak{M}(H_0)$, т. е. если L — полуалгебраический чертеж, то, воспользовавшись R-операциями $x_1 \wedge_c^m x_2$, $x_1 \vee_c^m x_2$ (1.33), получим кусочно-полиномиальное класса $C^m(\mathbb{R}^n)$ уравнение $\omega(x) = 0$ чертежа L. При этом граница раздела областей, в которых $\omega(x)$ есть полином, будет формироваться автоматически в процессе построения функции $\omega(x)$. С прикладной точки зрения представляет интерес создание алгоритмов, по которым можно было бы находить «зоны полиномиальности» функции $\omega(x)$.

Замечание 3. Пусть G — группа линейных изометрических преобразований координат в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что чертеж $L \subset \mathbb{R}^n$ обладает симметрией, если существует такая система преобразований $\{f_i = A_i x + b_i\} \subset G$, не сводящаяся к тождественному преобразованию I, что $f_i(L) = L$, $\forall\, i \in K$, где K — непустое множество индексов. Если $\omega(x) = 0$ — уравнение чертежа L, то очевидно, что $\omega_i(x) \equiv \omega[A_i^{-1}(x - b)] = 0$ есть уравнение его образа $f_i(L)$ при преобразовании f_i. Однако из условия $f_i(L) = L$ еще не следует, что $\omega(x) \equiv \omega_i(x)$. Представляет интерес разработать такие методы построения уравнений сложных чертежей, которые обеспечивали бы также выполнение последнего условия при всех f_i, для которых $f_i(L) = L$. Частичное решение этого вопроса дано в работе [45].

§ 10. НОРМАЛЬНЫЕ И НОРМАЛИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕРТЕЖЕЙ

Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное замкнутое множество. Уравнение

$$f(x) = \inf_{y \in L} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} = 0 \qquad (1.124)$$

в § 6 было названо нормальным уравнением L. Функция $f(x)$, которую будем называть **нормальной функцией** L, непрерывна в $\mathbb{R}^n$, но может иметь разрывы производных не только в точках L, но и вне L. Так, например, в $\mathbb{R}^2$ нормальная функция окружности имеет разрывы производных в центре, а нормальная функция квадрата — в точках диагоналей. На продолжениях сторон квадрата терпят разрывы вторые производные нормальной функции.

Построение нормальных функций с использованием некоторой базисной системы H является, вообще говоря, довольно сложной задачей. Исключение составляют чертежи, состоящие из дуг окружностей, отрезков прямых и некоторых других элементов [45]. Однако, если даже нормальная функция $f(x)$ построена, она не может быть непосредственно использована в ситуациях, где требуется ее дифференцируемость.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка, $x \notin L$ и $\{x^i\}$ — множество точек L, ближайших к x (т. е. $\| x - x^i \| = \inf\limits_{y \in L} \| x - y \|$). Единичные векторы $v_i = (x - x^i) \| x - x^i \|^{-1}$, отнесенные к точкам x^i, назовем **нормалями** к L, соответствующими x. Нормали, соответствующие всем точкам $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, составляют **множество нормалей** к L по отношению к Ω. Прямые, принадлежащие нормали к L, будем называть **нормальными прямыми**. Точка L, которой соответствует единственная нормальная прямая, называется **регулярной точкой** L.

Введенное понятие нормали к L совпадает с обычным понятием нормали, если L состоит из регулярных точек (т. е. является гладкой линией в $\mathbb{R}^2$, поверхностью в $\mathbb{R}^3$ и т. д.). Для нормальной функции $f(x)$ чертежа L выполняются условия

$$f(x)|_L = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_L = 1, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right|_L = \left.\frac{\partial^3 f}{\partial v^3}\right|_L = \cdots = 0. \qquad (1.125)$$

Первые n условий (1.125) есть условия нормализованности (1.83), (1.84) уравнения $\omega(x) = 0$ до n-го порядка (см. § 6). Эти условия означают, что вдоль нормали к L функция ω ведет себя примерно как расстояние ρ точек этой нормали от чертежа L. Действительно, раскладывая функцию ω в окрестности точки $x^\circ \in L$ по направлению нормали v, получаем

$$\omega(x) = \rho + \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}\omega(x^\circ + \Theta\rho v)}{\partial v^{n+1}} \rho^{m+1}, \qquad (1.126)$$

где $0 < \Theta < 1$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $\rho = \| x^\circ - x \|$.

Методика построения уравнений чертежей, описанная в § 8, 9, позволяет обеспечить выполнение условия

$$\left.\frac{\partial \omega}{\partial v}\right|_L \neq 0. \qquad (1.127)$$

Действительно, если $\Sigma_i \doteq [\sigma_i(x) \geqslant 0]$ и $\frac{\partial \sigma_i}{\partial \nu_i} \neq 0$ на $\partial\Sigma_i$, где ν_i — нормаль к $\partial\Sigma_i$, то при использовании систем R-функций $\Re_\alpha$, $\Re_p$ и некоторых других, удовлетворяющих условиям теорем 4, 5 § 5 в тех точках L, где одновременно $\omega = 0$ и $\sigma_i = 0$, согласно формуле (1.44) получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu}\bigg|_L = \pm \frac{\partial \sigma_i}{\partial \nu_i}\bigg|_L \neq 0. \tag{1.128}$$

Если принять, что нормаль ν направлена в область, где $\omega > 0$, то условие (1.127) можно уточнить: $\frac{\partial \omega}{\partial \nu}\Big|_L > 0$.

Располагая уравнением $\omega_1 = 0$, $\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}\Big|_L > 0$, нетрудно построить уравнение $\omega(x) = 0$ чертежа L, нормализованное до первого порядка.

Теорема 1. *Если $\omega_1(x) \in C^m(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям $\omega_1|_L = 0$ и $\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}\Big|_L > 0$, то функция*

$$\omega \equiv \omega_1 [\omega_1^2 + |\operatorname{grad} \omega_1|^2]^{-\frac{1}{2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n) \tag{1.129}$$

удовлетворяет условиям

$$\omega|_L = 0, \ \frac{\partial \omega}{\partial \nu}\bigg|_L = 1 \tag{1.130}$$

во всех регулярных точках L.

Доказательство. Из условия $\omega_1/L = 0$ следует, что на L функция сохраняет постоянное значение, и тогда в силу условия $\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}\Big|_L > 0$ нормаль ν имеет направление вектора $\operatorname{grad} \omega_1$. Следовательно, $\nu = \operatorname{grad} \omega_1 \cdot |\operatorname{grad} \omega_1|^{-1}$, $\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu} = |\operatorname{grad} \omega_1|$. Дифференцируя (1.129), получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu}\bigg|_L = \frac{\partial \omega_1}{\partial \nu} [\omega_1^2 + |\operatorname{grad} \omega_1|^2]^{-\frac{1}{2}} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \nu} [\omega_1^2 + |\operatorname{grad} \omega_1|^2]^{-\frac{1}{2}}\bigg|_L =$$

$$= \frac{\partial \omega_1}{\partial \nu} |\operatorname{grad} \omega_1|^{-1}|_L = 1.$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что выражение в квадратных скобках в (1.129) можно заменить любым другим, не обращающимся в 0 выражением, совпадающим на L с $|\operatorname{grad} \omega_1|^{-1}$. Это позволяет применять следующую формулу:

$$\omega \equiv |\operatorname{grad} \omega_1|^{-1}|_L\, \omega_1. \tag{1.131}$$

Пример 1. Используя (1.131), получаем нормализованные уравнения границ для полупространства $a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{a_0}{\|a\|}-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i x_i}{\|a\|}=0, \tag{1.132}$$

где $\|a\|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$. Это уравнение является нормализованным до бесконечного порядка; для шара $R^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\geqslant 0$ в $\mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{2R}\left[R^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\right]=0; \tag{1.133}$$

для слоя $\left(-a_0-\sum_{i=1}^{n}a_i x^i\right)\left(b_0+\sum_{i=1}^{n}a_i x^i\right)\geqslant 0$ между параллельными гиперплоскостями в $\mathbb{R}^n$

$$-\frac{1}{2\,|a_0-b_0|\,\|a\|}\left(a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i x^i\right)\left(b_0+\sum_{i=1}^{n}a_i x^i\right)=0, \tag{1.134}$$

где $\|a\|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$.

Пример 2. Для области $\Sigma=(x_2-\sin x_1\geqslant 0)$, ограниченной синусоидой, нормализованное уравнение границы представим в виде

$$\partial\Sigma=\left(\frac{x_2-\sin x_1}{\sqrt{1+\cos^2 x_1}}=0\right).$$

Заметим, что для функций $\omega(x)$ сложного вида непосредственное применение формул (1.129) или (1.131) сопряжено с трудностями вычислительного характера. Поэтому рассмотрим другой, более экономный, метод, опирающийся на теоремы 1—7 § 5 и, в частности, на их следствие — формулу (1.52).

Приведенные примеры показывают, что для таких простых областей, как полуплоскость, полоса, круг, слой и многих других, нормализованные уравнения границ получаются путем введения простых нормировочных множителей.

Пусть имеется некоторая система областей $\{\Sigma_i=(\sigma_i\geqslant 0)\}$, уравнения $\sigma_i=0$ границ которых нормализованы до первого порядка: $\frac{\partial\sigma_i}{\partial\nu_i}=1$ на $\partial\Sigma_i$. Тогда при использовании систем R-функций $\mathfrak{R}_\alpha$, $\mathfrak{R}_p$ и других, удовлетворяющих условиям теорем 4, 5 § 5, согласно формуле (1.52) получим $\frac{\partial\omega}{\partial\nu}=1$ на $\partial\Omega$, где ν — нормаль к $\partial\Omega$, направленная в область $\omega>0$. Таким образом, если уравнения $\sigma_i(x)=0$ опорных областей Σ_i нормализованы до первого порядка, а уравнение $\omega(x) = 0$ сложной области Ω строится с помощью достаточно полных систем R-функций (1.26), (1.30) или (1.32), то оно автоматически оказывается нормализованным (в регулярных точках $\partial\Omega$) до первого порядка. Более того, если пользоваться системой (1.30) при $p > m + 1$, то из нормализованности опорных неравенств $\sigma_i(x) \geqslant 0$ до порядка m следует в силу теоремы 6 § 5 нормализованность до порядка m и уравнения $\omega(x) = 0$. В частности, используя нормальные уравнения сторон многоугольника и систему R-функций $x_1 \bigwedge\limits_p x_2$, $x_1 \bigvee\limits_p x_2$ $(p > m + 1)$, по описанным в работах [45, 47] алгоритмам можем получить его уравнение, нормализованное до порядка m. Аналогичным образом можно получать нормализованные до заданного порядка уравнения многогранников.

Пример 3. Нормализованное уравнение границы области Ω (см. рис. 5) получаем из (1.110) путем введения соответствующих нормировочных множителей:

$$\omega \equiv \left\{\left[\frac{x_2 - b\sin\dfrac{\pi x_1}{R}}{\sqrt{1 + \dfrac{b^2\pi^2}{R^2}\cos^2\dfrac{\pi x_1}{R}}}\right] \wedge_0 \left[\frac{1}{2R}(R^2 - x_1^2 - x_2^2)\right]\right\} \wedge_0$$

$$\wedge_0 \overline{\left[\frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2) \wedge_0 (x_2 - h)\right]} = 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос о построении нормализованных до первого порядка уравнений элементов границ.

Теорема 2. *Если $\partial\Omega = (\omega = 0)$ — нормализованное до первого порядка уравнение границы $\partial\Omega$, а $\Sigma = (\sigma \geqslant 0)$ — некоторая область, то*

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega^2 \vee^* \bar{\sigma}} = 0, \tag{1.135}$$

где $\vee^*$ есть $\vee_\alpha$ $(|\alpha| < 1,\ \alpha \equiv \mathrm{const})$, $\bigvee\limits_p$ $(p \geqslant 2)$ или $\overset{0}{\bigvee\limits_m}$ $(m > 1)$, является нормализованным до первого порядка уравнением элемента $\partial\Omega_1 = \partial\Omega \cap \Sigma$.

Доказательство. Согласно (1.118) уравнение (1.135) есть уравнение $\partial\Omega$. Пусть для определенности $\vee^* = \vee_\alpha$. Тогда при $\sigma > 0$

$$\omega^2 \vee_\alpha \bar{\sigma} \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left(\omega^2 - \sigma + \sqrt{\omega^4 + \sigma^2 + 2\alpha\omega^2\sigma}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{1+\alpha}\left[\omega^2 - \sigma + \sigma\left(1 + \frac{2\alpha\omega^2\sigma + \omega^4}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{1+\alpha}\left\{\omega^2 - \sigma + \sigma\left[1 + \frac{2\alpha\omega^2}{\sigma} + o(\omega^2)\right]\right\} \equiv \omega^2 + o(\omega^2).$$

Следовательно, $\omega_1 \equiv \sqrt{\omega^2 + o(\omega^2)} \equiv |\omega| + o(\omega)$. Поэтому

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu} = \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \operatorname{sign} \omega + O(\omega).$$

Таким образом, учитывая, что $\omega > 0$ в области Ω, получаем

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}\right)\Bigg|_{\omega=+0} = \pm \frac{\partial \omega}{\partial \nu} = \left|\frac{\partial \omega}{\partial \nu}\right| = 1,$$

что и требовалось доказать.

Если чертеж L есть объединение элементов $L_i = (\omega_i(x) = 0)$, а уравнения $\omega_i(x) = 0$ нормализованы и $\omega_i(x) > 0$ вне L_i, то нормализованное уравнение L может быть получено по формуле (1.119). При использовании формулы (1.120) нормализованность будет, вообще говоря, нарушена.

ГЛАВА 2

ПУЧКИ ФУНКЦИЙ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ПУЧКИ ФУНКЦИЙ С ФИКСИРОВАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА ЗАДАННЫХ ЧЕРТЕЖАХ

Заданный чертеж L можно описать бесчисленным множеством различных уравнений. Если $L = (\omega = 0)$, а Φ — знакопостоянная ограниченная функция, то $L = (\omega\Phi = 0)$. Формулу

$$u = \omega\Phi, \tag{2.1}$$

где $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — элемент некоторого множества $\mathfrak{M}$, например множества непрерывных ограниченных функций, можно рассматривать как формулу **пучка функций**, равных нулю на L. Обозначим такой пучок $L(\omega, \mathfrak{M})$. Функцию $\Phi \in \mathfrak{M}$ назовем **неопределенной компонентой** пучка. Чем шире множество $\mathfrak{M}$, тем шире пучок $u = \omega\Phi$. В дальнейшем предполагается, что $\mathfrak{M}$ — некоторое линейное пространство $(C^k, H^s, \mathfrak{M}(H_0), \ldots)$. Тогда пучок (2.1) также является линейным пространством.

Пусть $\mathfrak{M}_0$ — некоторое множество функций, равных нулю на L. Важным является вопрос: какой должна быть функция ω, чтобы условие $L(\omega, \mathfrak{M}) \supset \mathfrak{M}_0$ выполнялось для возможно более узкого множества $\mathfrak{M}$? То, что широта пучка $L(\omega, \mathfrak{M})$ существенно зависит от выбора функции ω, можно показать на примере. Пусть L — окружность в $\mathbb{R}^2$, которой соответствуют два различных уравнения:

$$\omega_1 \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \text{ и } \omega_2 \equiv (R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2 = 0.$$

Предположим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H_0)$ — множество целых рациональных функций, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}(H_0)$ — множество целых рациональных функций, равных нулю на L. Тогда $L(\omega_1, \mathfrak{M}) \supset \mathfrak{M}_1$, но $L(\omega_2, \mathfrak{M}) \not\supset \mathfrak{M}_1$. Действительно, $(R^2 - x_1^2 - x_2^2) \in \mathfrak{M}_1$, но не существует полинома Φ такого, что $(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2\,\Phi \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2$.

В общем случае сформулированный выше вопрос является весьма сложным, так как его решение существенно зависит также от геометрии чертежа L. В дальнейшем он рассматривается с более общих позиций, в связи с задачей об аппроксимационных возможностях использования пучков. Такие задачи довольно часто возникают в математической физике. Например, в задаче о чистом кручении стержня с поперечным сечением Ω необходимо найти решение уравнения $\Delta u + 2 = 0$ в Ω с краевым условием $u = 0$ на $\partial\Omega$. В задаче о защемленной по контуру $\partial\Omega$ тонкой пластинке, подверженной поперечному давлению q, необходимо найти решение уравнения Софи Жермен $D\Delta\Delta u = q$ в Ω (D — цилиндрическая жесткость пластинки) при краевых условиях на $\partial\Omega$ $u = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. Таким образом, решения этих двух задач принадлежат некоторым пучкам функций, равных нулю на $\partial\Omega$. Здесь возникают следующие вопросы: а) каковы должны быть эти пучки, чтобы в них содержались решения названных задач или, по крайней мере, достаточно хорошие их приближения? б) как конструктивно задать эти пучки? в) как выбирать неопределенные компоненты пучков, чтобы получать или аппроксимировать искомые решения?

В работе И. Ю. Харрик [77], например, рассматривается задача об оценке порядка приближения в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функции $u(x)$, обращающейся на ее границе в нуль вместе со своими частными производными до $(r-1)$-го порядка включительно, функциями вида $\omega^r(x) P_j(x)$, где $P_j(x)$, $j = 1, \ldots, N$, — последовательность полиномов степени не выше N относительно каждого из аргументов x_i. При этом предполагается, что $\partial\Omega$ есть C^∞-многообразие; $\omega(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)$ и, кроме того, $\omega > 0$ при $x \in \Omega$, $\omega = 0$ на $\partial\Omega$, $\omega(x) < 0$ вне Ω; $\operatorname{grad}\omega \neq 0$ на $\partial\Omega$, а производные от ω порядка k удовлетворяют условию Липшица ($\mathrm{Lip}_M 1$). Для оценки получена формула

$$\|u - \omega^r P_N\|_{C^p(\Omega)} = O\left\{\frac{\omega\left(u, \frac{1}{N}\right)_{C^k(\Omega)}}{N^{k-p}}\right\}, \qquad p = 0, 1, \ldots, k, \quad (2.2)$$

где $\omega(u, \varepsilon)_{C^k(\Omega)}$, $\varepsilon > 0$,— модуль непрерывности функции u в пространстве $C^k(\Omega)$ [78]. В работе [89] показано, как можно использовать функции вида $\omega^r \Phi$ в качестве координатных, полагая Φ многомерным полиномом или сплайном, и приведены оценки приближенного решения краевой задачи при использовании вариационных методов Ритца — Галеркина.

Аналогичные задачи возникают и в других ситуациях, когда условие «равняться нулю на чертеже L» заменяется другими условиями более сложного вида. В частности, в настоящем параграфе рассмотрена задача о построении пучка функций, принимающих в точках данного чертежа значения, определяемые некоторой функцией $\varphi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. При этом функция φ_0 может, вообще говоря, и не быть определенной везде вне L. Пучок же функций, совпадающих на L с функцией φ_0, должен быть определен везде в $\mathbb{R}^n$ или в некоторой интересующей нас области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Вопросы продолжения функций через границу области с различной степенью гладкости рассматривались в работах [5, 15, 41, 87, 92 и др.]. В данной работе речь идет об эффективной конструктивной реализации такого продолжения в рамках множества $\mathfrak{M}(H)$

H-реализуемых функций, где H — алгоритмически полная система, включающая все арифметические операции (см. § 6).

Предположим вначале, что чертеж L можно разбить на элементы $L_1, \ldots, L_m$, на каждом из которых функция φ_0 может быть задана формулой

$$\varphi_0|_{L_i} = \varphi_i|_{L_i}, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2.3}$$

где φ_i — H-реализуемые функции, определенные везде в Ω. Некоторые точки элемента L_i могут одновременно быть точками и некоторых других элементов L. Эти точки будем называть **концевыми точками** L_i. Пусть $L_k^0 = \bigcup L_i$, $i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m$, а $\omega_k^0(x) = 0$ — уравнение L_k^0 и $\omega_k^0(x) > 0$ вне L_k^0. Уравнения $\omega_k^0(x) = 0$, $\omega_k^0(x) \in \mathfrak{M}(H)$, могут быть построены с помощью R-функций методами, описанными в предыдущих параграфах. Тогда функция

$$\varphi = \frac{\varphi_1\omega_1^0 + \cdots + \varphi_m\omega_m^0}{\omega_1^0 + \cdots + \omega_m^0} \tag{2.4}$$

имеет смысл везде в Ω, за исключением, быть может, концевых точек элементов L_i, $i = 1, \ldots, m$, и удовлетворяет условию $\varphi/_L = \varphi_0$. Очевидно, что все другие функции, принимающие на L значения φ_0, отличаются от φ на функцию, равную нулю на L. Поэтому для пучка функций, удовлетворяющих условиям (2.3), получаем формулу

$$u = \frac{\varphi_1\omega_1^0 + \cdots + \varphi_m\omega_m^0}{\omega_1^0 + \cdots + \omega_m^0} + \omega\Phi, \tag{2.5}$$

где $\omega = 0$ — уравнение L, а Φ — неопределенная компонента пучка из множества ограниченных функций.

Иногда «склеивающую» функцию φ удобно строить в виде

$$\varphi = \frac{\varphi_1\tau_1 + \cdots + \varphi_m\tau_m}{\tau_1 + \cdots + \tau_m}, \tag{2.6}$$

где $\tau_i = \omega_i^{-1}$, $L_i = (\omega_i = 0)$, $\omega_i > 0$ вне L_i. В этом случае при приближении к элементу L_i функция $\tau_i \to \infty$ и предельные значения φ совпадают со значениями φ_i. Если дополнительно обеспечить нормализованность функций ω_i (см. § 10 гл. 1) на L_i и, кроме того, выполнение условия $\omega_i, \varphi_i \in C^N(\Omega)$, где N — достаточно большое число, то можно воспользоваться формулой

$$\varphi = \frac{\varphi_1\tau_1^{k_1} + \cdots + \varphi_m\tau_m^{k_m}}{\tau_1^{k_1} + \cdots + \tau_m^{k_m}}, \tag{2.7}$$

дополнительно обеспечивающей выполнение условий

$$D^j\varphi|_{L_i} = D^j\varphi_i|_{L_i}, \qquad j = 1, \ldots, k_{m-1}, \tag{2.8}$$

для регулярных точек L_i, в которых определено направление нормали ν. Из этих формул, в частности, следует, что если на L_i функция φ_i удовлетворяет некоторому условию вида

$$F_i(x, \varphi_i, D_1\varphi_i, \ldots, D_{k_{m-1}}\varphi_i)|_{L_i} = 0, \tag{2.9}$$

где F — непрерывная функция, то этому же условию на L_i удовлетворяет и функция φ (2.7).

Описанный метод построения функции φ, принимающей на элементах L_i чертежа L заданные значения $\varphi_i \in \mathfrak{M}(H)$, назовем **склеиванием** граничных значений.

Пример 1. Пусть $L = (R^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0)$ — окружность в $\mathbb{R}^2$; L_1, L_2 — соответственно левая и правая полуокружности; $\varphi_1 = e^{x_1x_2}$, $\varphi_2 = x_1 + x_2$. Согласно (1.117) уравнения L_1 и L_2 можем представить в виде

$$\omega_1 \equiv (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 x_1 = 0,$$

$$\omega_2 \equiv (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 (-x_1) = 0.$$

Тогда, воспользовавшись формулой (2.4), для пучка функций, принимающих значения $u = \varphi_i$ на L_i, $i = 1, 2$, получаем выражение

$$u = \frac{(x_1 + x_2)[(R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 x_1] + e^{x_1x_2}[(R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 (-x_1)]}{(R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 x_1 + (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 (-x_1)} +$$
$$+ (R^2 - x_1^2 - x_2^2)\Phi.$$

Выше предполагалось, что заданные функции $\varphi_i \in \mathfrak{M}(H)$ определены везде в рассматриваемой области Ω. Определенные трудности при построении склеивающей функции φ могут возникнуть в том случае, когда среди функций φ_i есть такие, которые в Ω имеют разрывы или не везде определены. В этом случае можно воспользоваться следующей методикой.

Если формула φ_i имеет вид $\varphi_i = \varphi_i(\lambda_i, x)$, где λ_i — некоторая положительная на L_i функция, но в тех точках вне L_i, где $\lambda_i \leqslant 0$, функция φ_i не определена, то при построении склеивающей функции φ ее можно заменить функцией $\varphi_i^* = \varphi_i(\sqrt{\omega^2 + \lambda_i^2}, x)$. Если λ_i — неотрицательная функция, то можно также взять $\varphi_i^* = \varphi_i(\omega + \lambda_i, x)$, где $L = (\omega = 0)$, $\omega \geqslant 0$.

Пример 2. Пусть в предыдущем примере $\varphi_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}$, $\varphi_2 = \sqrt{x_1}$. Таким образом, функция φ_1 не определена в точке $(0, 0)$, а φ_2 — в полуплоскости $x_1 < 0$. Положим $\varphi_1^* = [(x_1^2 + x_2^2) + R^2 - x_1^2 - x_2^2] = R^2$, $\varphi_2^* = \sqrt[4]{x_1^2 + R^2 - x_1^2 - x_2^2} = \sqrt[4]{R^2 - x_2^2}$. Тогда для пучка функций, принимающих на L_1 значения $(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$, а на L_2 — значения $\sqrt{x_1}$, получим формулу

$$u = \frac{R^2[(R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 x_1] + \sqrt[4]{R^2 - x_2^2}[(R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 (-x_1)]}{(R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 x_1 + (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \vee_0 (-x_1)} +$$
$$+ (R^2 - x_1^2 - x_2^2)\Phi.$$

Оператор склеивания значений φ_i, определяемый какой-либо из приведенных выше формул, будем в дальнейшем обозначать EC: $: \mathrm{EC}\varphi_i = \varphi$.

Условия вида $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ часто встречаются в краевых задачах математической физики и известны как **условия первого рода** или **условия Дирихле.**

§ 2. ПРОДОЛЖЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВНУТРЬ ОБЛАСТИ

1. Пусть граница $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ есть кусочно-дифференцируемое многообразие (чертеж) размерности $n-1$; $\nu = \nu(x^\circ)$ — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в регулярной точке $x^\circ \in \partial\Omega$: Tx° — касательное к $\partial\Omega$ в точке x° пространство с базисом $\{\tau^i\}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Преположим, что $\omega(x) = 0$ — нормализованное до первого порядка уравнение $\partial\Omega$, причем $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H)$. В предыдущей главе было показано, что такая функция может быть построена для практически произвольных областей в классе H-реализуемых (в частности, элементарных) функций при весьма общих предположениях относительно базисной системы H, достаточно лишь, чтобы она была алгоритмически полной (см. § 10 гл. 1).

Из нормализованности уравнения $\omega(x) = 0$ следует, что

$$|\nabla\omega|\,|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 1, \tag{2.10}$$

где $\nabla = D^1 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Кроме того, для каждого из касательных векторов τ^i выполняется условие

$$(\nabla\omega, \tau^i) = (\nu, \tau^i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{2.11}$$

Пусть $l' = (l_1', \ldots, l_n')$ — заданный в точках $\partial\Omega$ вектор, где $l_i' = l_i'(x) \in \mathfrak{M}(H)$. Обозначим $l_0' = \mathrm{EC}l' = (\mathrm{EC}l_1', \ldots, \mathrm{EC}l_n')$, где EC — введенный в предыдущем параграфе оператор продолжения граничных значений, определяемый одной из формул (2.6) или (2.7). Тогда вектор $l = l_0' \left[\|l'\|^2 + \omega^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ коллинеарен вектору l_0' во всех точках области Ω, а на $\partial\Omega$ является единичным. Слагаемое ω^2 внесено в квадратные скобки $[\|l'\|^2 + \omega^2]$, чтобы устранить особенность, которая может возникнуть в точках, где $\|l_0'\| = 0$. Если $\|l_0'\| \neq 0$ в Ω, то можно положить $l = l_0' \|l'\|^{-1}$. Заметим, что вектора ν и τ^i могут рассматриваться как частный случай вектора l, единичного на $\partial\Omega$ и имеющего соответствующее направление. Учитывая, что m-я производная по направлению l' в точках $\partial\Omega$ определяется формулой

$$\frac{\partial^m f}{(\partial l')^m} = (l', \nabla)^m f = \left(l_1' \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + l_n' \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f,$$

приходим к выводу, что функция

$$D_m^l f \equiv (l, \nabla)^m f \equiv \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + l_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f, \ f \in C^m, \quad (2.12)$$

определенная везде в $\Omega \cup \partial\Omega$, на $\partial\Omega$ превращается в производную по направлению l':

$$D_m^l f\,|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^m f}{\partial l'^m}. \quad (2.13)$$

Введя обозначение $D_m^\nu = D_m$, для вектора $l = \nu = \nabla\omega$ получим

$$D_m f = (\nabla\omega, \nabla)^m f = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\omega}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f =$$

$$= \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (2.14)$$

где суммирование распространяется на все возможные наборы $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ неотрицательных целых чисел, для которых $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$.

Выражение, стоящее в правой части формулы (2.12), можно получить формально из выражения для m-го дифференциала

$$d^m f(x) = d^m [f(x_1, \ldots, x_n), dx_1, \ldots, dx_n] =$$

$$= \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f$$

путем замены в последнем dx_i на l_i, $i = 1, \ldots, n$, т. е.

$$D_m^l f = d^m [f(x), l_1, \ldots, l_n]. \quad (2.15)$$

Как известно, для дифференциала произведения uv справедлива формула Лейбница

$$d^m(uv) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j d^{m-j} u d^j v.$$

Произведя в этой формуле замену dx_i на l_i, получим формулу

$$D_m^l(uv) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j D_{m-j}^l u D_j^l v, \quad (2.16)$$

где $D_0^l f \equiv f$ по определению.

Замечание 1. Следует иметь в виду, что в общем случае

$$D_i(D_j f) \neq (D_i D_j) f = D_{i+j} f.$$

В дальнейшем используются также формулы

$$D_1^l F(u, v) = \frac{\partial F}{\partial u} D_1^l u + \frac{\partial F}{\partial v} D_1^l v;$$

$$D_2^l F(u, v) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(D_1^l u)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} D_1^l u D_1^l v + \quad (2.17)$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(D_1^l v)^2 + \frac{\partial F}{\partial u} D_2^l u + \frac{\partial F}{\partial v} D_2^l v.$$

Перечислим некоторые свойства оператора D_m:

$$D_1 x_i \equiv \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \ D_k x_i \equiv 0, \quad k \geqslant 2; \tag{2.18}$$

$$D_1(D_1\omega) \equiv 2D_2\omega; \tag{2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_k\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \equiv D_{k+1}\omega; \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_1\omega \equiv 2D_1\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right); \tag{2.21}$$

$$D_k\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} D_k\omega - k\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i \partial x_j} D_{k-1}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right); \tag{2.22}$$

$$D_1(D_k f) \equiv D_{k+1} f + \sum_{|\alpha|=k}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i D_1\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^{-1}\right]. \tag{2.23}$$

Для $l = \tau^i$ введем обозначение $D_m^{\tau_i} = T_m^i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Для касательных векторов $\tau^i = (\tau_1^i, \ldots, \tau_n^i)$ имеем следующие $2(n-1)$ условия:

$$(\nu, \tau^i) = \frac{\partial \omega}{\partial x_1}\tau_1^i + \cdots + \frac{\partial \omega}{\partial x_n}\tau_n^i|_{\partial\Omega} = 0; \tag{2.24}$$

$$(\tau_1^i)^2 + \ldots + (\tau_n^i)^2 = 1.$$

В частности, при $n = 2$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\bigg|_{\partial\Omega}\tau_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2}\bigg|_{\partial\Omega}\tau_2 = 0, \ \tau_1^2 + \tau_2^2 = 1.$$

Решая эту систему, получаем

$$\tau_1 = \mp\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)_{\partial\Omega}, \ \tau_2 = \pm\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)\bigg|_{\partial\Omega}.$$

Нетрудно убедиться, что левому обходу области Ω в этих формулах соответствует верхний знак. Таким образом, вектор

$$\tau = -\frac{\partial \omega}{\partial x_2} i_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_1} i_2,$$

определенный везде в $\mathbb{R}^2$, на границе области превращается в касательный вектор $\tau = (\tau_1, \tau_2)$. Обозначив $T_m^\tau = T_m$, в этом случае получим

$$T_m f = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i} C_m^i \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-i}\partial x_2^i}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^i\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^{m-i}. \tag{2.25}$$

Заметим, что согласно (2.13)

$$T_m f\,|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^m f}{\partial\tau^m}. \tag{2.26}$$

Отметим также, что $T_1\omega \equiv 0$.

Используя операторы D_m и T_m, можно продолжать внутрь области и смешанные производные, например:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\tau} \equiv (D_1T_1)\,f\,|_{\partial\Omega} \equiv \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(-\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right] f\,\Big|_{\partial\Omega} \equiv \left\{-\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} +\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right\}\Big|_{\partial\Omega} =$$

$$= \left\{-\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right\}\Big|_{\partial\Omega}.$$

Легко заметить, что если к равным частям формул (2.12), (2.14) и (2.25) прибавить $\omega\Phi$, где $\Phi \in C(\Omega)$, то граничные свойства операторов D_m^l, D_m, T_m сохранятся. Произвол в выборе Φ иногда можно использовать для учета особенностей решений краевых задач. Это обстоятельство было применено, например, при решении одного класса смешанных (контактных) задач теории упругости [49].

Замечание 2. Иногда в краевые условия входят производные по дуге s граничной кривой $\partial\Omega$. От этих производных также можно перейти к производным по касательной и нормали. В частности,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial\tau},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\nu},$$

где ρ — радиус кривизны $\partial\Omega$.

Замечание 3. В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $2(n-1)$, условия (2.24) связывают $n^2 - n$ величин τ_j^i, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, n-1$, и в Tx° имеется бесчисленное множество систем линейно независимых векторов

$$\tau_j^k = \begin{cases} -q_k\dfrac{\partial\omega}{\partial x_k}, & j \neq k, \\ q_k\displaystyle\sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x_r}, & j = k, \end{cases}$$

где $q_k > 0$. Тогда

$$(\nu, \tau^k) = (\nabla\omega, \tau^k) = -q_k\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x_j} + q_k\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x_r} = 0$$

и, следовательно, вектор τ^k ортогонален ν. Потребуем, чтобы $\|\tau^k\| = 1$ на $\partial\Omega$:

$$\|\tau^k\| = q_k \sqrt{(n-1)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right)^2} = 1.$$

Отсюда

$$q_k = \left[(n-1)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (2.27)$$

Замечание 4. С помощью операторов D_m можно осуществлять нормализацию до заданного порядка уравнения $\omega_1 = 0$, нормализованного до первого порядка. Алгортм этой нормализации, приведенный в работе [50], представлен рекуррентными соотношениями

$$\omega \equiv \omega_{k-1} - \frac{1}{k!}\omega_1^k D_k \omega_{k-1}, \qquad k = 2, \ldots, n. \qquad (2.28)$$

Пример. Уравнение $\omega_1 \equiv \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0$ является нормализованным до первого порядка. Так как $D_2\omega_1 \equiv -x_1^2 - x_2^2$, то

$$\omega_2 \equiv \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{2\cdot 4}(1 - x_1^2 - x_2^2)^2(x_1^2 + x_2^2) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\cdot 4}(1 - x_1^2 - x_2^2)[4 + (1 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)] = 0$$

— нормализованное до второго порядка уравнение окружности.

2. Вместо введенных выше операторов D_m^l (в частности, D_m и T_m) можно применять операторы разностного вида, превращающиеся на $\partial\Omega$ в производные по соответствующим направлениям. При численной реализации такой подход может оказаться более устойчивым по отношению к неизбежным погрешностям вычислений или возмущениям функции f внутри области Ω.

Пусть $f, \omega \in C^{m+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$ и, как и ранее, $\omega = 0$ — нормализованное до первого порядка уравнение $\partial\Omega$. Введем обозначения:

$$x_+^i = \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \frac{1}{2}\omega(x), x_{i+1}, \ldots, x_n\right);$$

$$x_-^i = \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i - \frac{1}{2}\omega(x), x_{i+1}, \ldots, x_n\right);$$

$$h_i = -\omega(x_+^i) + \omega(x_-^i); \quad h = (h_1, \ldots, h_n); \quad l = (l_1, \ldots, l_n); \qquad (2.29)$$

$$Q_l^j f(x) = f(x + jl);$$

$$Q_{l^1}^i Q_{l^2}^j f(x) = f(x + il^1 + jl^2); \quad (Q_l)^k = Q_l^k.$$

Пользуясь формулой конечных разностей, получаем

$$(Q_l - 1)^k f(x) = (\nabla, l)^k f(x) + (\nabla, l)^{k+1} \Psi(x, l), \tag{2.30}$$

где $\Psi(x, l) \in C(\Omega \cup \partial\Omega)$ — некоторая функция (остаточный член).

Пусть $l = \omega(x) l^\circ$, $l^\circ = (l_1^\circ, \ldots, l_n^\circ)$ и $\| l^\circ \| = 1$ на $\partial\Omega$. Тогда из (2.30) находим

$$(Q_l - 1)^k f(x) = (Q_{\omega l^\circ} - 1)^k f(x) = \omega^k(x) (\nabla, l^\circ)^k f(x) + O[\omega^{k+1}(x)],$$

или согласно (2.12)

$$(Q_{\omega l^\circ} - 1)^k f(x) = \omega^k(x) D_k^{l^\circ} f(x) + O[\omega^{k+1}(x)]. \tag{2.31}$$

Тогда, учитывая, что $D_k^{l^\circ} f(x) |_{\partial\Omega} = \dfrac{\partial^k f}{\partial l^{\circ k}}$, получаем

$$\lim_{\substack{\|x-y\| \to 0 \\ y \in \partial\Omega}} [\omega^{-k}(x) (Q_{\omega l^\circ} - 1)^k f(x)] |_{\partial\Omega} = \frac{\partial^k f(y)}{\partial l^{\circ k}}.$$

Полагая, в частности, $\omega l^\circ = h = (h_1, \ldots, h_n)$ и учитывая, что $h = -\omega\nabla\omega + O(\omega^2)$, $\|\nabla\omega\| = 1$ на $\partial\Omega$, из формулы (2.31) находим

$$(Q_h - 1)^k f(x) = (-1)^k \omega^k(x) D_k f(x) + O[\omega^{k+1}(x)]. \tag{2.32}$$

Например, если $f(x) \in C^3(\mathbb{R}^2)$, то

$$(Q_h - 1) f(x) = f(x+h) - f(x) = f\Big[x_1 - \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right) + \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}(x_1, x_2), x_2\right);$$

$$x_2 - \omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + \omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right)\Big] -$$

$$- f(x_1, x_2) = -\omega(x_1, x_2) D_1 f(x_1, x_2) + O[\omega^2(x_1, x_2)]; \tag{2.33}$$

$$(Q_h - 1)^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) =$$

$$= f\Big[x_1 - 2\omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right) + 2\omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right);$$

$$x_2 - 2\omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + 2\omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right)\Big] -$$

$$-2f\Big[x_1 - \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right) + \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right);$$

$$x_2 - \omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + \omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right)\Big] +$$

$$+ f(x_1, x_2) = \omega^2(x_1, x_2) D_2 f(x_1, x_2) + O[\omega^3(x_1, x_2)].$$

Аналогичные формулы можно получить и для операторов T_k. В случае, если $f(x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, достаточно вместо h взять $l = (l_1, l_2)$, где $l_1 = -\omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + \omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right)$; $l_2 =$

$$= \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\ \omega(x_1, x_2), x_2\right) - \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2),\ x_2\right).$$ Например:

$$(Q_l - 1) f(x) = f(x + l) - f(x) = f\left[x_1 - \omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + \right.$$
$$+ \omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right);$$
$$x_2 + \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\ \omega(x_1, x_1), x_2\right) -$$
$$\left. - \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2), x_2\right)\right] - f(x_1, x_2) = \omega(x_1, x_2)\, T_1 f(x_1, x_2) +$$
$$+ O[\omega^2(x_1, x_2)]; \qquad (2.34)$$

$$(Q_l - 1)^2 f(x) = f(x + 2l) - 2f(x + l) + f(x) =$$
$$= f\left[x_1 - 2\omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + 2\omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right);\right.$$
$$\left. x_2 + 2\omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\ \omega(x_1, x_2), x_2\right) - 2\omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\ \omega(x_1, x_2), x_2\right)\right] -$$
$$- 2f\left[x_1 - \omega\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right) + \omega\left(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\omega(x_1, x_2)\right);\right.$$
$$\left. x_2 + \omega\left(x_1 + \frac{1}{2}\ \omega(x_1, x_2), x_2\right) - \omega\left(x_1 - \frac{1}{2}\ \omega(x_1, x_2), x_2\right)\right] +$$
$$+ f(x_1, x_2) = \omega^2(x_1, x_2)\, T_2 f(x_1, x_2) + O[\omega^2(x_1, x_2)].$$

При построении соответствующих формул для операторов $(D_k T_m)$ следует руководствоваться формулой

$$[(Q_h - 1)^k (Q_l - 1)^m] f(x) = (-1)^k \omega^{k+m}(x)\,(D_k T_m) f(x) +$$
$$+ O[\omega^{k+m+1}(x)]. \qquad (2.35)$$

§ 3. МЕТОД НОРМАЛИЗАНТ И РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ДАННОГО ЧЕРТЕЖА

1. Ниже описана процедура, которая всякой функции $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ ставит в соответствие такую функцию $f^* \in C^m(\mathbb{R}^n)$, которая на границе $\partial\Omega$ совпадает с f и имеет нулевые нормальные производные до порядка m. В этой процедуре будет участвовать функция ω, входящая в аналитическое описание границы $\partial\Omega = (\omega = 0)$. При этом, если $f, \omega \in \mathfrak{M}(H)$, где $H = \{x_1 + x_2, x_1 x_2, a\ \forall a \in \mathbb{R}^1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, и множество $\mathfrak{M}(H)$ является инвариантным относительно операции дифференцирования, то также и $f^* \in \mathfrak{M}(H)$.

Определение. Функция $f^*(x) \equiv f(x - \omega\nabla\omega)$ называется нормализантой функции $f(x)$ по функции $\omega(x)$.

Теорема 1. *Если* $f, \omega \in C^m(\Omega \cup \partial\Omega)$, $\partial\Omega$ — C^1-*многообразие и* $\omega(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0; \quad \left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 1; \quad \left.\frac{\partial^2\omega}{\partial\nu^2}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial^3\omega}{\partial\nu^3}\right|_{\partial\Omega} = \cdots = \left.\frac{\partial^m\omega}{\partial\nu^m}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.36}$$

то нормализанта $f^*(x)$ *функции* $f(x)$ *по функции* $\omega(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$f^*(x)|_{\partial\Omega} = f(x)|_{\partial\Omega}; \quad \left.\frac{\partial^k f^*}{\partial\nu^k}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.37}$$

Доказательство. Так как $D_2\omega|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2\omega}{\partial\nu^2}$, то в силу условий (2.36)

$$D_2\omega|_{\partial\Omega} = 0.$$

Воспользовавшись формулой (2.19), получаем

$$D_1D_1\omega = \frac{\partial}{\partial x_1}(D_1\omega)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(D_1\omega)\cdot\left.\frac{\partial\omega}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.38}$$

Пусть τ^k, $k = 1, \ldots, n-1$,— базис в касательном к $\partial\Omega$ пространстве $T\omega$. В этом случае выполняется условие

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial x_1} & \frac{\partial\omega}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\omega}{\partial x_n} \\ \tau_1^1 & \tau_2^1 & \cdots & \tau_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_1^{n-1} & \tau_2^{n-1} & \cdots & \tau_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.39}$$

Так как $D_1\omega|_{\partial\Omega} = \left.\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2\right]\right|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 1$, то $\partial\Omega$ является гиперповерхностью уровня функции $D_1\omega$. Тогда $\frac{\partial}{\partial\tau^i}D_1\omega|_{\partial\Omega} = 0$, а следовательно,

$$D_1^{\tau^i}D_1\omega|_{\partial\Omega} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

или, что то же,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(D_1\omega)\,\tau_j^i|_{\partial\Omega} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{2.40}$$

Присоединив к (2.40) уравнение (2.38), получим систему n алгебраических уравнений относительно $\frac{\partial}{\partial x_j}D_1\omega$, $j = 1, \ldots, n$, решение которой согласно условию (2.39) является нулевым, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} D_1\omega\,|_{\partial\Omega} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.41}$$

Согласно (2.21) и (2.41) получаем

$$D_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} D_1\omega\,|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.42}$$

Из условий (2.36) следует, что

$$D_k\omega\,|_{\partial\Omega} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, n+1. \tag{2.43}$$

Следовательно, $\partial\Omega$ является гиперповерхностью уровня для функций $D_k\omega$, $k = 2, 3, \ldots, n+1$. Поэтому

$$D_1^{\tau^k} D_k\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(D_k\omega)\,\tau_j^k\,|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.44}$$

С другой стороны, если подставить в (2.23) вместо f функцию ω, то получим

$$D_1 D_k\omega = D_{k+1}\omega + \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^k\omega}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^{-1}.$$

На $\partial\Omega$ с учетом (2.42) и (2.43) получаем

$$D_1 D_k\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(D_k\omega)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{2.45}$$

Из условия (2.39) следует, что система (2.44), (2.45) имеет нулевое решение:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(D_k\omega)\,|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.46}$$

Воспользовавшись формулами (2.22), с учетом (2.42) и (2.46) последовательно находим

$$D_k\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad k,\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.47}$$

Пусть $u_i = x_i - \omega\frac{\partial\omega}{\partial x_i}$. Тогда

$$D_1 u_i = D_1\left(x_i - \omega\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial\omega}{\partial x_i} - \frac{\partial\omega}{\partial x_i} D_1\omega - \omega D_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right).$$

Так как на $\partial\Omega$ $\omega = 0$, $D_1\omega = 1$, то

$$D_1 u_i\,|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.48}$$

Учитывая, что $D_k x_i \equiv 0$ при $k \geqslant 2$, получаем

$$D_k u_i = -D_k\left(\omega\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right) = -\sum_{j=0}^{k} C_k^j D_{k-j}\omega D_j\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right). \tag{2.49}$$

На основании формул (2.43), (2.47) и (2.48)

$$D_k(u_i)|_{\partial\Omega} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2.50}$$

Применим операторы $D_1, D_2, \ldots$ к нормализанте $f^*(x) = f(u)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и учтем формулы (2.48), тогда

$$D_k f^*(x)|_{\partial\Omega} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2.51}$$

Отсюда следует выполнение условий (2.37), что и требовалось доказать.

Таким образом, нормализанта $f^*(x)$ функции $f(x)$ по функции $\omega(x)$ достаточно малой окрестности $\partial\Omega$ ведет себя вдоль нормали почти как константа, а вдоль $\partial\Omega$ совпадает с $f(x)$. В одномерном случае, если написать уравнение точки x_0 в виде $\omega(x) \equiv x - x_0 = 0$, для нормализанты $f^*(x)$ получаем $f^*(x) = f[x - (x - x_0)] = f(x_0)$.

2. Рассмотрим задачу о разложении функции $f(x) \in C^{m+1}(\Omega)$ в окрестности границы $\partial\Omega$, предполагая, что последняя описывается нормализованным до $(m+1)$-го порядка уравнением $\omega = 0$, $\omega \in \mathfrak{M}(H)$, где, как и в начале параграфа, H — алгоритмически полная и инвариантная относительно операции дифференцирования система.

Предположим, что на $\partial\Omega$ известны значения функции $f(x)$ и ее нормальных производных до m-го порядка:

$$\begin{aligned} &f(x)|_{\partial\Omega} = f_{0l}(x), \\ &\left.\frac{\partial^k f}{\partial \nu^k}\right|_{\partial\Omega} = f_{kl}(x), \qquad k = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2.52}$$

где $f_{il}(x)$ — известные на $\partial\Omega$ функции. Применяя к $f_{il}(x)$ оператор продолжения EC, описанный в § 1, и обозначая $\mathrm{EC}f_{il}(x) = f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $f_i(x) \in \mathfrak{M}(H)$, формулы (2.52) можем заменить формулами

$$\left.\frac{\partial^k f}{\partial \nu^k}\right|_{\partial\Omega} = f_k(x)|_{\partial\Omega}, \tag{2.53}$$

где $\frac{\partial^k f}{\partial \nu^k} \equiv f$ при $k = 0$.

Теорема 2. *Если $f_i(x), \omega(x) \in C^{m+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$ и $\omega(x)$ удовлетворяет условиям (2.36) до $(m+1)$-го порядка, то функция*

$$P_m(x) = f_0^*(x) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} f_j^*(x)\,\omega^j(x), \tag{2.54}$$

где $f_j^*(x)$ — нормализанты $f_j(x)$ по функции $\omega(x)$, удовлетворяет условиям

$$P_m(x)|_{\partial\Omega} = f_0(x)|_{\partial\Omega}, \tag{2.55}$$

$$\left.\frac{\partial^k P_m(x)}{\partial \nu^k}\right|_{\partial\Omega} = f_k(x)|_{\partial\Omega}, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{2.56}$$

Доказательство. Справедливость формулы (2.55) очевидна. Покажем, что выполняются условия (2.56). Применим к $P_m(x)$ оператор D_k:

$$D_k P_m(x) = D_k f_0^*(x) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} D_k [f_j^*(x)\, \omega^j(x)]. \tag{2.57}$$

Согласно формуле Лейбница (2.16)

$$D_k (f_j^* \omega^j) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i D_{k-i}(f_j^*)\, D_i(\omega^j). \tag{2.58}$$

В силу (2.51)

$$D_{k-i}(f_j^*) = \begin{cases} 0 \text{ при } k-i \neq j, \\ f_j^* \text{ при } k-i = j; \end{cases} \tag{2.59}$$

$$D_i(\omega^j)|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ j! \text{ при } i = j. \end{cases} \tag{2.60}$$

Следовательно,

$$D_k (f_j^* \omega^j)|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq j, \\ k!\ f_k^* \text{ при } k = j. \end{cases} \tag{2.61}$$

Поэтому

$$D_k P_m(x)|_{\partial\Omega} = f_k^*|_{\partial\Omega} = f_k|_{\partial\Omega}. \tag{2.62}$$

Учитывая формулу (2.13), приходим к условиям (2.56). Теорема доказана.

Формула (2.54) является аналогом полинома Тейлора, совпадающего в заданной точке с функцией f и ее производными до некоторого порядка. Однако здесь $P_m(x)$, вообще говоря, не является полиномом, а имеет вид некоторой H-реализуемой функции (например, элементарной). Обычный полином Тейлора для одномерного случая получается из (2.54), если положить $\omega(x) = x - x_0$.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 1 имеет место формула*

$$f(x) = P_m(x) + O(\omega^{m+1}). \tag{2.63}$$

Доказательство. Рассмотрим поведение некоторой функции $F(x) \in C^{m+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$ вдоль нормали к $\partial\Omega$ в точке $x^0 \in \partial\Omega$. Учитывая, что $\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 1$, и вводя обозначение $q_i(x^0) = \frac{\partial\omega(x^0)}{\partial x_i}$, легко получить формулу

$$x = x^0 + \rho(x)\, q(x^0),\ \rho(x) = \|x - x^0\|,$$

где $q(x^0) = \nabla\omega(x^0) = (q_1(x^0), \ldots, q_n(x^0))$. Тогда

$$F(x) = F[x^0 + \rho(x)\, q(x^0)] = F(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F(x^0)}{\partial\nu^k} \rho^k(x) + $$

$$+ \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} F(x^0 + \Theta\rho q), \quad 0 < \Theta < 1. \tag{2.64}$$

В частности, если $F(x) = f_k^*(x)$, то с учетом формул (2.51) получаем

$$f_k^*(x) = f(x^0) + O(\rho^{m+1}), \qquad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{2.65}$$

Тогда

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} f_k(x^0)\rho^k + O(\rho^{m+1}). \tag{2.66}$$

Отсюда согласно (2.65) находим

$$f(x) = f^*(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}[f_k^*(x) + O(\rho^{m+1})][\omega(x) + O(\rho^{m+1})]^k + O(\rho^{m+1}),$$

или

$$f(x) = f^*(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} f_k^*(x)\,\omega^k(x) + O(\rho^{m+1}) = P_m(x) + O(\rho^{m+1}). \tag{2.67}$$

Формулу (2.67) будем называть обобщенной формулой Тейлора [31]. При выводе этой формулы предполагалось, что $\partial\Omega$ является C^1-дифференцируемым многообразием. Разложению функций в окрестности дифференцируемых многообразий посвящены работы [36, 85, 86], в которых конструктивная реализация имеет иной характер: значения функций на $\partial\Omega$ получаются в результате раскрытия неопределенностей вида $\rho^k(x)\,I_k(x)$ при $\rho \to 0$, где $\rho(x)$ — кратчайшее расстояние от точки x до $\partial\Omega$, а $I_k(x)$ — некоторые расходящиеся при $x \to x^0 \in \partial\Omega$ интегралы. Такое решение вопроса не является конструктивным в смысле, определенном в § 1 гл. 1, так как не содержит ответа на вопросы, с помощью какой базисной системы операций H и каким образом можно получить формулы для $\rho(x)$ и для коэффициентов разложения.

§ 4. ПУЧКИ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ И СМЕШАННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ

В прикладной математике часто встречаются задачи, в которых необходимо рассматривать функции (вектор-функции, тензоры и т. п.), удовлетворяющие в точках некоторого чертежа условиям, имеющим дифференциальный характер. Так, например, в задачах теплопроводности краевое условие $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = q\lambda^{-1}$ возникает тогда, когда на границе $\partial\Omega$ тела задан тепловой поток $q(x)$ (здесь λ — коэффициент теплопроводности среды). Это условие носит название **условия второго рода** или **условия Неймана**. В частности, когда $q \equiv 0$, краевое условие $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$ принято называть **условием теплоизоляции**. Более общее **условие третьего рода** или **условие** конвективного теплообмена с окружающей средой имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + h_1 u |_{\partial\Omega} = \psi, \qquad (2.68)$$

где $h = -\alpha\lambda^{-1}$, $\psi = -\alpha\lambda^{-1}u_0$, α — коэффициент теплоотдачи, u_0 — температура окружающей среды. Встречаются и нелинейные краевые условия дифференциального вида. Таким условием, например, является условие Стефана — Больцмана

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \varepsilon\sigma(u^4 - u_0^4), \qquad (2.69)$$

где σ — постоянная Стефана — Больцмана, ε — степень черноты граничной поверхности, характеризующая ее излучательную способность, u_0 — абсолютная температура окружающей среды [46]. В некоторых условиях функция u удовлетворяет двум или большему числу краевых условий на одной и той же границе $\partial\Omega$. Так, например, в задаче о поперечном изгибе пластины встречаются следующие типы краевых условий [37]:

а) условия жесткого защемления по границе

$$w |_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0; \qquad (2.70)$$

б) условия свободного опирания

$$w |_{\partial\Omega} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0; \qquad (2.71)$$

в) условия на свободном крае

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (2.72)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \nu}\Delta w + (1 - \nu_0)\left[\frac{\partial^3 w}{\partial \nu \partial \tau^2} - \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)\right]\right\}\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где ρ — радиус кривизны $\partial\Omega$, а ν_0 — коэффициент Пуассона.

При расчете оболочек встречаются краевые условия более высоких порядков.

Весьма широкий класс задач составляют так называемые **смешанные** краевые задачи, в которых на различных участках границы заданы различные типы краевых условий. Имеется и ряд других, более сложных, типов краевых условий (например, для систем уравнений, в задачах с неизвестной границей, интегро-дифференциальные условия и т. д.).

Краевые задачи для уравнений с частными производными, связанные с расчетом различного рода физико-механических полей, являются не единственным, хотя, пожалуй, и наиболее обширным классом задач, в которых необходимо учитывать информацию функционального или дифференциального характера на некоторых чертежах. Такого же рода задачи встречаются, например, при построении интерполяционных формул, аналогичных известной формуле

Эрмита, в которых информация о функции и ее производных задается не в отдельных точках, а на некоторых линиях или поверхностях [76]. Такая информация может явиться следствием обработки экспериментальных данных в задачах, связанных с совместной переработкой сложной аналитической и геометрической информации.

1. Рассмотрим вначале случай, когда на $\partial\Omega$ выполняется краевое условие

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} + \sum_{|\gamma|=k} a_\gamma^0 \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial \nu^{\gamma_0} (\partial \tau^1)^{\gamma_1} \ldots (\partial \tau^{n-1})^{\gamma_{n-1}}} +$$

$$+ \underset{\forall\gamma,\ |\gamma| < k}{F_1} \left(x,\ u,\ \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial \nu^{\gamma_0} (\partial \tau^1)^{\gamma_1} \ldots (\partial \tau^{n-1})^{\gamma_{n-1}}} \right) = 0, \tag{2.73}$$

где $\nu = (\nu_2, \ldots, \nu_n)$ — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$; $\tau^i = (\tau_1^i, \ldots$ $\ldots, \tau_n^i)$, $i = 1, \ldots, n-1$,— базис в касательном к $\partial\Omega$ в точке x пространстве $Tx \subset \mathbb{R}^n$, $a_\gamma^0 = a_\gamma^0(x) \in C^1(\partial\Omega)$, $F_1 \in C^1$. Учитывая, что

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = (\nu, \nabla)^k u = \left(\nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k u;$$

$$\frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial \nu^{\gamma_0} (\partial \tau^1)^{\gamma_1} \ldots (\partial \tau^{n-1})^{\gamma_{n-1}}} = (\nu, \nabla)^{\gamma_0} (\tau^1, \nabla)^{\gamma_1} \ldots (\tau^{n-1}, \nabla)^{\gamma_{n-1}} u =$$

$$= \left(\nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\gamma_0} \left(\tau_1^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \tau_n^1 \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\gamma_1} \cdots$$

$$\cdots \left(\tau_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \tau_n^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\gamma_{n-1}} u, \tag{2.74}$$

условие (2.73) приводим к виду

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha^0 D^\alpha u + \underset{(\forall\alpha,\ |\alpha| < k)}{F_1 (x, u, D^\alpha u)} |_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.75}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $b_\alpha^0 = b_\alpha^0(x) \in C(\partial\Omega)$.

Покажем, что при этом выполняется равенство

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha^0 \nu^\alpha = 1, \quad \nu^\alpha = \nu_1^{\alpha_1} \ldots \nu_n^{\alpha_n}. \tag{2.76}$$

Действительно, формулу (2.75) можно получить, подставляя (2.74) в (2.73) и группируя члены, содержащие одинаковые производные $D^\alpha u$. Замена в выражении $\Sigma b_\alpha^0 D^\alpha u$ производных $D^\alpha u$ величинами $\nu^\alpha = \nu_1^{\alpha_1} \ldots \nu_n^{\alpha_n}$, в результате которой получается левая часть формулы (2.76), равносильна замене вектора $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right)$ вектором $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$. Но из (2.74) следует, что при такой замене вследствие того, что $(\nu, \nu) = 1$, $(\nu, \tau^i) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\dfrac{\partial^k u}{\partial \nu^k}$

заменится единицей, а $\dfrac{\partial^{|\gamma|}u}{\partial\nu^{\gamma_0}(\partial\tau^1)^{\gamma_1}\ldots(\partial\tau^{n-1})^{\gamma_{n-1}}}$ — нулем. В результате получаем формулу (2.76).

Пусть $b_\alpha = \mathrm{EC}b_\alpha^0$, $F(x, u, D^\alpha u) = \mathrm{EC}\, F_1(x, u, D^\alpha u)$, где EC — оператор продолжения граничных значений в Ω (см. § 1). Тогда выражение

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha u + F(x, u, \underset{(|\alpha|<k)}{D^\alpha u}) \qquad (2.77)$$

имеет смысл везде в Ω, а на $\partial\Omega$ согласно (2.75) равняется нулю. Поэтому его можно считать элементом некоторого пучка $\omega\Psi$ функций, равных нулю на $\partial\Omega$, т. е.

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha u + F(x, u, \underset{(|\alpha|<k)}{D^\alpha u}) = \omega\Psi. \qquad (2.78)$$

Формулу (2.78) можно рассматривать как продолжение граничного условия (2.75) внутрь Ω.

Для построения пучка функций, удовлетворяющих условию (2.75), положим

$$u = \Phi_1 + \omega^k\Psi_1, \qquad (2.79)$$

где $\omega = 0$, $\omega \in C^{k+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$ — нормализованное уравнение $\partial\Omega$, Φ_1, $\Psi_1 \in C^{k+1}(\Omega \cup \partial\Omega)$. Учитывая, что

$$D^\alpha(\omega^k\Psi_1) = k!\Psi_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} + O(\omega), \qquad (2.80)$$

$$F[x, \Phi_1 + \omega^k\Psi_1, D^\alpha\Phi_1 + D^\alpha(\omega^k\Psi_1)] =$$

$$= F[x, \Phi_1 + O(\omega^k), D^\alpha\Phi_1 + O(\omega^{k-|\alpha|})] = F(x, \Phi_1, \underset{(|\alpha|<k)}{D^\alpha\Phi_1}) + O(\omega),$$

и включая слагаемые порядка $O(\omega)$ в правую часть формулы (2.78), преобразуем ее к виду

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha\Phi_1 + k!\Psi_1\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} +$$

$$+ F(x, \Phi_1, D^\alpha\Phi_1) = \omega\Psi_2, \qquad (2.81)$$

где Ψ_2 — новая неопределенная функция. Так как $\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)\Big|_{\partial\Omega} = \nu_i$, вторая сумма в формуле (2.81) согласно (2.76) равна 1 на $\partial\Omega$. Поэтому

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = 1 + O(\omega). \qquad (2.82)$$

Включая слагаемое $O(\omega)$ в $\omega\Psi_2$, формулу (2.81) перепишем в виде

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha\Phi_1 + k!\Psi_1 + F(x, \Phi_1, \underset{(|\alpha|<k)}{D^\alpha\Phi_1}) = \omega\Phi_2, \qquad (2.83)$$

где Φ_2 — новая неопределенная функция. Найдя отсюда Ψ_1 и подставив в (2.79), получим

$$u = \Phi_1 + \frac{\omega^k}{k!}\left[\omega\Phi_2 - \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha\Phi_1 - F(x, \Phi_1, D^\alpha\Phi_1)\right]. \quad (2.84)$$

Формула (2.84) определяет пучок функций, удовлетворяющих на $\partial\Omega$ условию (2.75). Неопределенной компонентой пучка является $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$.

Пример 1. Для краевых условий (2.68) и (2.69) из (2.84) получаем

$$\begin{aligned} &u = \Phi_1 - \omega h_1\Phi_1 - \omega D_1\Phi_1 + \omega^2\Phi_2 + \omega\psi, \\ &u = \Phi_1 + \frac{\omega\varepsilon\sigma}{\lambda}\Phi_1^4 - \frac{\omega}{\lambda}D_1\Phi_1 + \frac{\omega^2}{\lambda}\Phi_2 - \frac{\omega\varepsilon\sigma}{\lambda}u_0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Первая из этих формул является линейной относительно каждой из неопределенных компонент.

2. Пусть теперь на $\partial\Omega$ задана система условий вида (2.75)

$$B_i^0 u \equiv \sum_{|\alpha|=k_i} b_{\alpha_i}^0 D^\alpha u + F_{1i}(x, u, \underset{(|\alpha|<k_i)}{D^\alpha u})|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.86)$$

де $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$, и для каждого k_i выполняется условие (2.76). (Такую нормировку краевых условий всегда можно произвести.) Как и ранее, обозначим $b_{\alpha i} = \mathrm{EC}b_{\alpha i}^0$, $F_i = \mathrm{EC}F_{1i}$, $B_i = \mathrm{EC}B_i^0$. Для пучка функций, удовлетворяющих i-му условию, согласно (2.84) получаем

$$u = \Phi_{1i} + \frac{\omega^{k_i+1}}{k_i!}\Phi_{2i} - \frac{\omega^{k_i}}{k_i!}B_i(\Phi_{1i}) = W_i[\Phi_{1i}, \Phi_{2i}, B_i(\Phi_{1i})]. \quad (2.87)$$

Построение пучка, удовлетворяющего всем условиям, в принципе можно выполнить следующим образом. Вначале строим пучок $u = W_m[\Phi_{1m}, \Phi_{2m}, B_m(\Phi_{1m})]$, соответствующий краевому условию наивысшего порядка k_m. При подстановке этой формулы в $(m-1)$-е условие слагаемые, содержащие множитель ω^{k_m}, обратятся на $\partial\Omega$ в нуль. Поэтому достаточно выбрать первое слагаемое Φ_{1m} так, чтобы оно удовлетворяло рассматриваемому условию. Для этого его можно взять в виде пучка $\Phi_{1m} = W[\Phi_{1,m-1}, \Phi_{2,m-2}, B_{m-1}(\Phi_{1,m-1})]$. Таким образом, условия порядка k_m и k_{m-1} будут выполняться, если положить

$$\begin{aligned} &u = W_m\{W_{m-1}[\Phi_{1,m-1}, \Phi_{2,m-1}, B_{m-1}(\Phi_{1,m-1})]; \\ &\Phi_{2m};\quad B_m[W_{m-1}(\Phi_{1,m-1}, \Phi_{2,m-1}, B_{m-1}(\Phi_{1,m-1}))]\}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Действуя аналогично, можем удовлетворить следующему краевому условию, если подставим в (2.88) вместо компоненты $\Phi_{1,m-1}$ выражение $W_{m-2}[\Phi_{1,m-2}, \Phi_{2,m-2}, B_{m-2}(\Phi_{1\,m-2})]$, и т. д.

Описанный путь построения пучка, удовлетворяющего условиям (2.86), обусловливает для этого случая равенство наибольшего порядка дифференцирования неопределенных компонент сумме порядков операторов B_i. Это в конечном итоге приводит к плохим аппроксимационным свойствам пучка [23—25]. Однако фактически порядок можно понизить. Для этого нужно учесть, что в формулах (2.87) возле членов B_i, содержащих наивысшие производные, стоят множители ω^{k_i} и при q-кратном дифференцировании произведения вида $\omega^k P$ все производные от P с порядком выше $q - k$ имеют множитель вида ω^p, где $p \geqslant 1$, и соответствующие им слагаемые на границе $\partial\Omega$ равны нулю. Если в формуле, полученной по описанной выше методике, опустить все такие слагаемые, то получим формулу для пучка с более низким наибольшим порядком дифференцирования. Подробно эта процедура проделана в работе [24].

Пример 2. Построим пучок функций, удовлетворяющих условиям (2.71). При удовлетворении первому условию получаем пучок функций, равных нулю на $\partial\Omega$:

$$w = \omega\Phi_{11}. \tag{2.89}$$

Выражение для пучка, удовлетворяющего второму условию, в соответствии с (2.87) имеет вид

$$w = \Phi_{21} + \frac{\omega^3}{2!}\Phi_{22} - \frac{\omega^2}{2!}[D_2\Phi_{21} + \nu_0 T_2\Phi_{21}], \tag{2.90}$$

где D_2, T_2 — операторы, введенные в § 2.

Чтобы удовлетворить двум условиям (2.71), необходимо, следуя описанной методике, подставить (2.89) вместо Φ_{21} в (2.90). Тогда

$$w = \omega\Phi_{11} + \frac{\omega^3}{2!}\Phi_{22} - \frac{\omega^2}{2!}[D_2(\omega_1\Phi_{11}) + \nu_0 T_2(\omega\Phi_{11})]. \tag{2.91}$$

Формула (2.91) может рассматриваться как пучок функций, удовлетворяющих условиям (2.71). Эту формулу можно преобразовать так, что в ней не будут содержаться вторые производные от неопределенной компоненты Φ_{11}. Применяя формулу Лейбница (2.16), получаем

$$D_2(\omega\Phi_{11}) = \Phi_{11}D_2\omega + 2D_1\omega D_1\Phi_{11} + \omega D_2\Phi_{11},$$
$$T_2(\omega\Phi_{11}) = \Phi_{11}T_2\omega + 2T_1\omega T_1\Phi_{11} + \omega T_2\Phi_{11}.$$

Так как $D_1\omega = 1 + \omega\chi = 1 + O(\omega)$ и $T_1\omega \equiv 0$, то

$$\begin{aligned} D_2(\omega\Phi_{11}) &= \Phi_{11}D_2\omega + 2D_1\Phi_{11} + \omega\chi_1, \\ T_2(\omega\Phi_{11}) &= \Phi_{11}T_2\omega + \omega\chi_2, \end{aligned} \tag{2.92}$$

где χ_1, χ_2 — некоторые ограниченные функции. Подставив (2.92) в (2.91), объединив слагаемые, содержащие множитель ω^3 и обозначив $\Phi_{11} = \Phi_1$, $\Phi_{22} - \chi_1 - \nu_0\chi_2 = \Phi_2$, формулу (2.91) преобразуем к виду

$$w = \omega\Phi_1 - \frac{\omega^2}{2}[\Phi_1(D_2\omega + \nu_0 T_2\omega) + 2D_1\Phi_1] + \frac{\omega^3}{2}\Phi_2. \tag{2.93}$$

Как и в примере 1, неопределенной компонентой здесь является пара функций $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$.

Пример 3. Рассмотрим краевые условия (2.72) на свободном крае пластинки. Пучок, удовлетворяющий первому условию, в соответствии с (2.84) имеет вид

$$w_1 = \Phi_{11} + \frac{\omega^3}{2}\Phi_{21} - \frac{\omega^2}{2}(D_2\Phi_{11} + \nu_0 T_2\Phi_{11}). \qquad (2.94)$$

Для второго краевого условия аналогично получаем

$$w = \Phi_{12} + \frac{\omega^4}{6}\Phi_{22} - \frac{\omega^3}{6}\{D_3\Phi_{12} + (D_1T_2)\Phi_{12} +$$
$$+ (1-\nu_0)[(D_1T_2)\Phi_{12} - T_1k \cdot D_1\Phi_{12} - k(T_1D_1)\Phi_{12}]\}, \qquad (2.95)$$

где $k = \text{EC}\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Подставив в эту формулу вместо Φ_{12} выражение (2.90) (с одновременной заменой $\Phi_{21} = \Phi_{11}$, $\Phi_{22} = \Phi_{21}$), получим формулу для пучка функций, удовлетворяющих обоим условиям (2.72),

$$w = \Phi_{11} + \frac{\omega^3}{2}\Phi_{21} - \frac{\omega^2}{2}(D_2\Phi_{11} + \nu_0T_2\Phi_{11}) + \frac{\omega^4}{6}\Phi_{22} -$$
$$- \frac{\omega^3}{6}\Big\{D_3\Phi_{11} + \frac{1}{2}D_3(\omega^3\Phi_{21}) - \frac{1}{2}D_3(\omega^2D_2\Phi_{11}) - \frac{\nu_0}{2}D_3(\omega^2T_2\Phi_{11}) +$$
$$+ (2-\nu_0)\Big[(D_1T_2)\Phi_{11} + \frac{1}{2}(D_1T_2)(\omega^3\Phi_{21}) - \frac{1}{2}(D_1T_2)(\omega^2D_2\Phi_{11}) -$$
$$- \frac{\nu_0}{2}(D_1T_2)(\omega^2T_2\Phi_{11})\Big] - (1-\nu_0)T_1k \cdot \Big[D_1\Phi_{11} + \frac{1}{2}D_1(\omega^3\Phi_{21}) -$$
$$- \frac{1}{2}D_1(\omega^2D_2\Phi_{11}) - \frac{\nu_0}{2}D_1(\omega^2T_2\Phi_{11})\Big] - k(1-\nu_0)\Big[(T_1D_1)\Phi_{11} +$$
$$+ \frac{1}{2}(T_1D_1)(\omega^3\Phi_{21}) - \frac{1}{2}(T_1D_1)(\omega^2D_2\Phi_{11}) - \frac{\nu_0}{2}(T_1D_1)(\omega^2T_2\Phi_{11})\Big]\Big\}.$$
$$(2.96)$$

Используем свойства операторов D_k и T_k, а также учтем нормализованность функции ω на $\partial\Omega$, тогда

$$\begin{aligned}
&D_3(\omega^3\Psi) = 6\Psi + O(\omega);\\
&D_3(\omega^2\Psi) = 6\Psi D_2\omega + 6D_1\Psi + O(\omega);\\
&(D_1T_2)(\omega^3\Psi) = O(\omega); \quad (D_1T_1)(\omega^k\Psi) = O(\omega), \quad (k \geqslant 2); \qquad (2.97)\\
&(D_1T_2)(\omega^2\Psi) = \Psi(D_1T_2)(\omega^2) + O(\omega);\\
&D_1(\omega^k\Psi) = O(\omega) \quad (k > 1).
\end{aligned}$$

Учитывая (2.97), формулу (2.96) приводим к виду

$$w = \Phi_1 + \frac{\omega^3}{2}\Phi_2 - \frac{\omega^2}{2}(D_2\Phi_1 + \nu_0T_2\Phi_1) + \frac{\omega^4}{6}\Phi_3 -$$
$$- \{D_3\Phi_1 + 3\Phi_2 - 3D_2\Phi_1 \cdot D_2\omega - 3(D_1D_2)\Phi_1 - 3\nu_0T_2\Phi_1 \cdot D_2\omega -$$

$$-3\nu_0(D_1T_2)\Phi_1+(2-\nu_0)\Big[(D_1T_2)\Phi_1-\frac{1}{2}D_2\Phi_1\cdot(D_1T_2)(\omega^2)-$$
$$-\frac{\nu_0}{2}T_2\Phi_1\cdot(D_1T_2)(\omega^2)\Big]+(1-\nu_0)T_1k\cdot D_1\Phi_1-k(1-\nu_0)(T_1D_1)\Phi_1\};$$
$$(2.98)$$

здесь обозначено $\Phi_1=\Phi_{11}$, $\Phi_2=\Phi_{21}$, $\omega\Phi_3=\omega\Phi_{22}+O(\omega)$ (т. е. функция $\omega\Phi_3$ включает все слагаемые порядка $O(\omega)$).

3. В § 2 было показано, что вместо операторов D_k и T_k можно воспользоваться их разностными аналогами (2.32), (2.34) и (2.35). Например, применив первую из формул (2.33), выражения для пучков (2.85), рассмотренные в примере 1, можем представить в виде

$$u(x)=\Phi_1(x)-\omega(x)h_1(x)\Phi_1(x)+\Phi_1[x+h(x)]-\Phi_1(x)+$$
$$+\omega^2(x)\Phi_2(x)+\omega(x)\psi(x),$$
$$u(x)=\Phi_1(x)+\frac{\omega(x)\varepsilon\sigma}{\lambda}\Phi_1^4(x)+\frac{1}{\lambda}\Phi_1(x+h)-\frac{1}{\lambda}\Phi_1(x)+$$
$$+\frac{\omega^2(x)}{\lambda}\Phi_2(x)-\frac{\omega(x)\varepsilon\sigma}{\lambda}u_0, \qquad (2.99)$$

где h определяется формулой (2.29). Аналогично можно преобразовать и формулу (2.91) для пучка функций, удовлетворяющих условиям (2.71) свободного опирания пластины. С учетом того, что этот пучок задан в $\mathbb{R}^2$, получаем

$$w(x_1,x_2)=\omega(x_1,x_2)\Phi_1(x_1,x_2)+\frac{1}{2}\omega^3(x_1,x_2)\Phi_2(x_1,x_2)-$$
$$-\frac{1}{2}q(x_1,x_2)\Phi_1(x_1,x_2)+\omega(x_1,x_2)\Big\{\Phi_1\Big[x_1-$$
$$-\omega\Big(x_1+\frac{1}{2}\omega(x_1,x_2),x_2\Big)+\omega\Big(x_1-\frac{1}{2}\omega(x_1,x_2),x_2\Big);$$
$$x_2-\omega\Big(x_1,x_2+\frac{1}{2}\omega(x_1,x_2)\Big)+\omega\Big(x_1,x_2-\frac{1}{2}\omega(x_1,x_2)\Big)\Big]-$$
$$-\Phi_1(x_1,x_2)\Big\}, \qquad (2.100)$$

где $q(x_1,x_2)=D_2\omega+\nu_0T_2\omega$. Заметим, что при написании формул (2.99) и (2.100) слагаемые порядка $O(\omega)$ включались в $\omega\Phi_2$.

4. Пусть теперь $\partial\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{i=s}\partial\Omega_i$, где $\partial\Omega_i$ не имеют общих внутренних точек: $\operatorname{int}\partial\Omega_i\cap\operatorname{int}\partial\Omega_j=\varnothing$, $i\neq j$, и на каждом из $\partial\Omega_i$ задана своя система граничных условий вида (2.87).

Предположим, что $u=Q_i(\Phi^i)$, $\Phi^i=(\Phi_1^i,\ldots,\Phi_{m_i}^i)$, — пучок, удовлетворяющий всем условиям на $\partial\Omega_i$, старшая степень которых равна k_i. Тогда согласно (2.7) и (2.8), если воспользоваться формулой

$$u=\frac{Q_1(\Phi^1)\tau_1^{k_1+1}+\cdots+Q_s(\Phi^s)\tau_s^{k_s+1}}{\tau_1^{k_1+1}+\cdots+\tau_s^{k_s+1}}, \qquad (2.101)$$

при любом выборе $\Phi^1, \ldots, \Phi^s$ (в соответствующих допустимых для каждой неопределенной компоненты множествах) все краевые условия будут удовлетворены.

Описанный подход построения пучка функций, удовлетворяющих смешанным граничным условиям, естественно, не является единственно возможным. Его неудобство состоит в том, что с ростом числа участков увеличивается количество неопределенных компонент, а это создает определенные неудобства при использовании пучков на практике. В некоторых частных ситуациях возможны другие, более экономичные, решения [45, 46]. Покажем, например, как можно построить пучок функций, удовлетворяющих следующей системе краевых условий:

$$u|_{\partial\Omega_1} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu|_{\partial\Omega_2} = \psi. \tag{2.102}$$

Такие краевые условия часто встречаются, например, при исследовании температурных полей [46]. Пучок функций, удовлетворяющих первому из условий, очевидно, имеет вид

$$u = \omega_1\Phi + \varphi, \tag{2.103}$$

где Φ — неопределенная компонента, а $\omega_1 = 0$ — уравнение $\partial\Omega_1$.

Представим функцию Φ в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \omega_2\Psi_1 \tag{2.104}$$

и выберем Ψ_1 так, чтобы удовлетворялось и второе условие (2.102). Последнее условие заменим следующим:

$$D_1^{(2)}u + hu = \psi + \omega_2\Psi_2, \tag{2.105}$$

где Ψ_2 — некоторая ограниченная функция, $D_1^{(2)} = (\nabla\omega_2, \nabla)$, а $\omega_2 = 0$ — нормализованное уравнение $\partial\Omega_2$. Подставим (2.104) в (2.103):

$$u = \omega_1\Phi_1 + \omega_1\omega_2\Psi_1 + \varphi. \tag{2.106}$$

Подставляя (2.106) в (2.105) и учитывая свойства оператора $D_1^{(2)}$ (см. § 2), получаем

$$D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1) + D_1^{(2)}\omega_2 \cdot \omega_1\Psi_1 + \omega_2 D_1^{(2)}(\omega_1\Psi_1) + D_1^{(2)}\varphi +$$
$$+ h\omega_1\Phi_1 + h\omega_1\omega_2\Psi_1 + h\varphi = \psi + \omega_2\Psi_2. \tag{2.107}$$

Учитывая, что $D_1^{(2)}\omega_2 = 1 + O(\omega_2) = 1 + \omega_2\chi$ и вводя обозначение $\Phi_2 = \Psi_2 - h\omega_1\Psi_1 - D_1^{(2)}(\omega_1\Psi_1) - \chi\omega_1\Psi_1 + \Psi_1$, условие (2.107) запишем в виде

$$D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1) + (\omega_1 + \omega_2)\Psi_1 + D_1^{(2)}\varphi + h\omega_1\Phi_1 + h\varphi = \psi + \omega_2\Phi_2. \tag{2.108}$$

Из этого условия найдем Ψ_1 и подставим его в (2.106):

$$u = \omega_1\Phi_1 + \varphi + \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}[\psi + \omega_2\Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1\Phi_1) -$$
$$- D_1^{(2)}\varphi - h\omega_1\Phi_1 - h\varphi]. \tag{2.109}$$

Множитель $\omega_1 + \omega_2$ во втором слагаемом формулы (2.108) введен для того, чтобы избежать деления на нуль. Формула (2.109) определяет пучок функций, удовлетворяющих условиям (2.102). Неопределенной компонентой пучка является $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$.

Замечание. Выше, при выводе формул для пучков, удовлетворяющих различным типам краевых условий, из соображений простоты изложения не оговаривались классы, которым должны принадлежать функции, в том числе и неопределенные компоненты, участвующие в построении пучков. Этот пробел восполнен в гл. 4 при рассмотрении полноты пучков, фигурирующих там в качестве структурных формул для решений краевых задач.

5. Для построения пучков, удовлетворяющих дифференциальным краевым условиям, можно привлечь обобщенную формулу Тейлора (2.63). Основная трудность, возникающая при практическом использовании этой формулы, связана с необходимостью построения уравнений $\omega = 0$ (или $\omega_i = 0$), нормализованных до заданного порядка $m > 1$. Однако построение таких функций для каждой области достаточно выполнить один раз, а затем их можно многократно использовать при решении различных типов краевых задач.

Применим обобщенную формулу Тейлора к построению пучков для некоторых типов краевых условий.

А. Рассмотрим вначале краевое условие (2.68). Воспользуемся обобщенной формулой Тейлора при $m = 1$

$$u = \overset{*}{u}_0 + \overset{*}{u}_1\omega + \Phi_2\omega^2. \tag{2.110}$$

Пусть $u_0 = \Phi_1$ — некоторая неопределенная функция, с которой на границе $\partial\Omega$ совпадают функции пучка. Тогда, в силу краевого условия (2.68), можем положить $u_1 = \psi - h\Phi_1$ и переписать формулу (2.110) в виде

$$u = \overset{*}{\Phi}_1 + (\psi - h\Phi_1)^*\,\omega + \Phi_2\omega^2, \tag{2.111}$$

или

$$u(x) = \Phi_1(x - \omega\nabla\omega) + [\psi(x - \omega\nabla\omega) - h(x - \omega\nabla\omega) \times \\ \times \Phi_1(x - \omega\nabla\omega)]\,\omega(x) + \Phi_2(x)\,\omega^2(x). \tag{2.112}$$

Б. Рассмотрим краевое условие более общего вида

$$\frac{\partial u}{\partial l_1} + au = \varphi, \tag{2.113}$$

где l_1 — некоторое направление, такое, что $(l_1, \nu) > 0$. Воспользуемся оператором $D_1^{l_1}$ (2.12). Из $(l_1, \nu) > 0$ следует $D_1^{l_1}\omega > 0$ на $\partial\Omega$. Пусть $l = \mathrm{EC}l_1$ — продолжение l_1 в Ω (см. § 1), такое, что $D_1^l\omega \geqslant 0$ в $\Omega \cup \partial\Omega$. Тогда $q = D_1^l\omega + \omega > 0$ в $\Omega \cup \partial\Omega$. Перепишем условие (2.113) в виде

$$(D_1^l u + au - \varphi)\,|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.114}$$

Воспользуемся разложением (2.110). Подставляя его в (2.114), получаем

$$[D_1^l u_0^* + (D_1^l u_1^*)\,\omega + u_1^* D_1^l\omega + \omega^2 D_1^l \Phi_2 + 2\,(\omega_1 D_1^l \omega)\,\Phi_2 + + a u_0^* + a u_1^* \omega + a\Phi_2\omega^2 - \varphi]\,|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (2.115)$$

Учтем, что на $\partial\Omega$ $u^* = u$, и опустим некоторые слагаемые, имеющие множитель ω, тогда

$$[D_1^l u_0^* + (D_1^l\omega + \omega)\,u_1 + a u_0 - \varphi]\,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Отсюда

$$u_1 = \frac{1}{D_1^l\omega + \omega}\,(\varphi - a u_0 - D_1^l u_0^*)\,|_{\partial\Omega}. \qquad (2.116)$$

Подставив (2.116) в (2.111) и обозначив $u_0 = \Phi_1$, получим

$$u = \Phi_1^* + \frac{\omega}{D_1^l\omega + \omega}\,[\varphi^* - a^*\Phi_1^* - (D_1^l\Phi_1^*)^*] + \Phi_2\omega^2. \qquad (2.117)$$

Заметим, что в силу неравенства $D_1^l\omega + \omega > 0$ знаменатель (2.117) не обращается в нуль.

В. Рассмотрим смешанные краевые условия (2.102). Пусть $\partial\Omega_i = (\omega_i = 0)$, $i = 1, 2$, причем $\omega_2 = 0$ нормализовано до второго порядка. Разложим $u(x)$ в окрестности каждого из участков $\partial\Omega_i$ при $m = 1$:

$$\begin{aligned} u &= u_{01}^{*1} + u_{11}^{*1}\omega_1 + \Phi_{21}\omega_1^2, \\ u &= u_{02}^{*2} + u_{12}^{*2}\omega_2 + \Phi_{22}\omega_2^2, \end{aligned} \qquad (2.118)$$

где u^{*i} — нормализанта по ω_i, $i = 1, 2$. Поскольку это разложение одной и той же функции, то

$$u_{01}^{*1} + u_{11}^{*1}\omega_1 + \Phi_{21}\omega_1^2 \equiv u_{02}^{*2} + u_{12}^{*2}\omega_2 + \Phi_{22}\omega_2^2. \qquad (2.119)$$

Из первого краевого условия (2.102) следует, что можно положить $u_{01} = \varphi$. Чтобы удовлетворить второму краевому условию, воспользуемся пучком

$$u = u_{02}^{*2} + (\psi^{*2} - h^{*2}u_{02}^{*2})\,\omega_2 + \Phi_{22}\omega_2^2. \qquad (2.120)$$

Следовательно, тождество (2.119) принимает вид

$$\varphi^{*1} + u_{11}^{*1}\omega_1 + \Phi_{21}\omega_1^2 = u_{02}^{*2} + (\psi^{*2} - h^{*2}u_{02}^{*2})\,\omega_2 + \Phi_{22}\omega_2^2. \qquad (2.121)$$

В этой формуле четыре неопределенные функции: u_{11}, u_{02}, Φ_{21} и Φ_{22}. Положим $u_{11}^* = \Phi_1^{*1} - \omega_1\Phi_{21}$, $u_{02} = \Phi_2$, $\Phi_{21} = -\Phi_{22}$. Тогда из (2.121) найдем

$$\Phi_{22} = \frac{1}{\omega_1^2 + \omega_2^2}\,[\varphi^{*1} + \Phi_1^{*1}\omega_1 - \Phi_2^{*2} - (\psi^{*2} - h^{*2}\Phi_2^{*2})\,\omega_2].$$

Подставим Φ_{22} в (2.120):

$$u = \Phi_2^{*2} + (\psi^{*2} - h^{*2}\Phi_2^{*2})\,\omega_2 + \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2+\omega_2^2}[\varphi^{*1} + \Phi_1^{*1}\omega_1 - \Phi_2^{*2} - (\psi^{*2} - h^{*2}\Phi_2^{*2})\,\omega_2]. \qquad (2.122)$$

Заметим, что в отличие от формул, полученных обычным методом, в формулах (2.117) и (2.122) отсутствуют производные от неопределенных компонент пучков. Поэтому эти формулы более устойчивы к погрешностям вычислений неопределенных компонент, чем прежние.

§ 5. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И СТРУКТУРА ЕЕ РЕШЕНИЯ

Создание эффективных методов исследования и расчета физико-механических полей (температурных, силовых, деформационных, электродинамических, гидродинамических и др.) является одной из важнейших и в то же время наиболее трудных задач прикладной математики. С математической точки зрения задача расчета поля относится к числу краевых задач для уравнений с частными производными и обычно сводится к отысканию в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ решения уравнения

$$Au = f, \qquad (2.123)$$

где A — оператор, действующий из функционального пространства $X(\Omega)$ в функциональное пространство $Y(\Omega)$ с краевыми условиями

$$L_i u = \varphi_i \quad \text{на} \quad \partial\Omega_i, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (2.124)$$

($\partial\Omega_1, \ldots, \partial\Omega_m$ — покрытие границы $\partial\Omega$). При этом участки $\partial\Omega_i$ не обязательно все разные и могут совпадать с $\partial\Omega$. Такая постановка краевой задачи называется классической. Возможны и другие обобщенные постановки краевых задач, в которых вместо решения уравнения (2.123) минимизируется некоторый функционал $I(u)$ [38]. К числу краевых задач относятся и так называемые задачи на собственные значения, в которых следует искать отличные от нуля решения уравнения вида

$$Au + \lambda Bu = 0, \qquad (2.125)$$

удовлетворяющие однородным краевым условиям

$$L_i u = 0 \text{ на } \partial\Omega_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \qquad (2.126)$$

В некоторых случаях параметр λ может входить в краевые условия [35].

В зависимости от характера рассматриваемого поля при решении краевой задачи отыскивается функция, вектор-функция, тензор и т. д. Однако для простоты в дальнейшем будем употреблять термин «функция». Все введенные понятия без труда распространяются и на другие случаи.

Приведенные в постановке краевой задачи функции u, f, φ_l и операторы A, L_l назовем **аналитическими компонентами** краевой задачи; область Ω, ее границу $\partial\Omega$, участки $\partial\Omega_l$ — **геометрическими компонентами.**

Наличие в постановке краевых задач двух разнородных видов входной информации — аналитической и геометрической — серьезное препятствие при создании методов и алгоритмов их решения. Всякий метод неизбежно должен предусматривать совместную переработку этих двух видов информации, а это требует преобразования геометрической информации к соответствующему аналитическому виду. В таких классических методах, как, например, методы разделения переменных и интегральных преобразований, геометрия учитывается удачным выбором систем координат, в методе конформных отображений — построением отображающих функций, в вариационных методах — построением координатных («пробных») функций, в методах сеточного типа — составлением уравнений для узлов, близких к границе, и т. д. Метод конечных элементов, получивший развитие в последние годы, возник именно в связи со стремлением возможно точнее учитывать геометрию областей.

Метод R-функций (называемый часто структурным), который излагается в данной работе, указывает пути учета геометрической информации на аналитическом уровне, без какой-либо ее аппроксимации. Для этой цели предполагается использовать конструктивный аппарат (см. гл. 1), с помощью которого строятся пучки, рассмотренные в предыдущих параграфах.

Пусть D_A — область определения оператора A, входящего в уравнение (2.123), а

$$L_k'u = \varphi_k', \qquad k = 1, \ \ldots, \ q, \tag{2.127}$$

— некоторые из равенств (2.123), (2.124) (т. е. в (2.127) может входить и уравнение $Au = f$).

Определение 1. Формула $u = B(\Phi)$, где Φ — элемент некоторого множества $\mathfrak{M}$, а $B : \mathfrak{M} \to X(\Omega)$, называется **структурой решения,** учитывающей условия (2.127) и определенной на $\mathfrak{M}$, если

$$L_k'B(u) = \varphi_k', \qquad k = 1, \ \ldots, \ q, \ \forall\Phi \in \mathfrak{M}. \tag{2.128}$$

Структура, учитывающая все краевые условия (2.124), называется **общей.** Остальные структуры называются **частичными.**

Из этого определения видно, что структура, учитывающая все условия (2.123), (2.124), является решением краевой задачи. Нетрудно также заметить, что структура решения, учитывающая те или иные краевые условия, определяет пучок функций, удовлетворяющих этим же условиям. Таким образом, для построения структур решения можно воспользоваться методами, изложенными в предыдущих параграфах.

Структура $u = B(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{M}$, определяет некоторое множество $D_B \subset X(\Omega)$. Однако может оказаться, что решение u_0 краевой задачи не содержится в D_B. В этом случае структуру $u = B(\Phi)$ будем называть неполной. Если $u_0 \in D_B$, то структура $B(\Phi)$ называется **полной** (в классическом смысле). В большинстве случаев классического решения краевой задачи нет, а если оно и существует, то не известны или трудно реализуемы методы его получения. Поэтому чаще говорят о приближенных методах решения (в том или ином смысле). В соответствии с этим будем считать, что структура $u = B(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{M}$, есть **полная в смысле метрики** $\rho(u, v)$ (или по норме $\| u \|_A$), если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \Phi_\varepsilon \in \mathfrak{M},\quad \rho\,[u_0, B(\Phi_\varepsilon)] < \varepsilon \quad (\text{или } \|u_0 - B(\Phi_\varepsilon)\|_A < \varepsilon), \tag{2.129}$$

где u_0 — классическое или обобщенное решение задачи.

Пусть $u = B_i(\Phi_i)$, $\Phi_i \in \mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2$, — полные (или полные в определенном смысле) структуры, учитывающие некоторую систему условий. Тогда если $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, структуру $u = B_1(\Phi_1)$ будем называть **структурой лучшего качества**, чем $u = B_2(\Phi_2)$. Чем лучше качество структуры, тем ýже множество $\mathfrak{M}$, в котором следует искать неопределенную компоненту Φ, соответствующую точному решению задачи или достаточно хорошему его приближению.

При создании методов решения краевых задач необходимо знать ответ на вопрос: в каких пространствах можно выбирать аналитические и геометрические компоненты краевой задачи, чтобы она допускала единственное решение (в подходящем смысле)? На этот счет имеются весьма общие фундаментальные теоремы, обычно формулируемые в терминах соболевских пространств $H^s(\Omega)$ [29], поэтому в дальнейшем будем считать, что функциональное пространство D, которому принадлежит решение u_0, известно. Это позволяет ставить задачу о построении полных структур следующим образом: найти такую структуру $u = B(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{M}$, чтобы множество $D_B = \{u : u = B(\Phi), \forall \Phi \in \mathfrak{M}\}$ было всюду плотно в D (в смысле некоторой метрики $\rho(u, v)$). При этом практические соображения подсказывают, что необходимо стремиться к тому, чтобы множество $\mathfrak{M}$ было возможно более узким. Естественным является требование, чтобы это множество было задано конструктивно, например представляло собой множество полиномов (степенных, тригонометрических, сплайнов и т. д.).

Пусть $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$. Положим

$$\Phi_s = \sum_{i=1}^{m_s} c_{is}\psi_i^s, \qquad s = 1, \ldots, k, \tag{2.130}$$

где $\{\psi_i^s\}$ — выбранная последовательность полиномов, а $N = m_1 + \ldots + m_k$. Подставив это выражение в формулу $u = B(\Phi)$, получим N-параметрическое семейство функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям независимо от выбора постоянных c_{ij}. Такие функции принято называть координатными или базисными [33, 38]. Методы построения пучков функций, описанные в предыдущих параграфах, позволяют получать координатные последовательности в случае областей практически произвольной формы для различных типов краевых условий. Тем самым удается преодолеть главное препятствие, которое стояло на пути практического использования вариационных методов, в особенности типа Бубнова — Галеркина, требующих удовлетворения всех граничных условий. Данный подход многократно использован различными авторами. Обширная библиография по этому вопросу приведена в работах [45, 46, 49].

Значительный интерес представляет получение оценок вида (2.2), относящихся к структурам $\omega^k\Phi$, для структурных формул общего вида $u = B(\Phi)$. Этот вопрос для некоторых типов структур рассмотрен в гл. 4.

§ 6. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОМПОНЕНТ. ПРОБЛЕМА ВЫБОРА АППРОКСИМИРУЮЩИХ ПОЛИНОМОВ

1. Пусть

$$u = B_1(x, C_1, \ldots, C_N) \tag{2.131}$$

— результат подстановки формул (2.130) в структуру $u = B(\Phi)$, учитывающую условия (2.127). Задача состоит в таком выборе постоянных C_i, чтобы возможно лучше удовлетворялись остальные условия, имеющиеся в постановке краевой задачи. Заметим, что в случае линейных краевых условий структура $B(\Phi) = B(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ линейна относительно функций Φ_j и формула (2.131) имеет вид

$$u = \chi_0(x) + \sum_{i=1}^{N} C_i\chi_i. \tag{2.132}$$

Приведем краткие сведения о некоторых известных методах нахождения C_j.

Методы минимизации невязки. Пусть функция (2.131) удовлетворяет всем краевым условиям задачи. Подставив ее в уравнение $Au - f = 0$, найдем невязку

$$\delta(x, C_1, \ldots, C_N) = AB_1(x, C_1, \ldots, C_N) - f(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.133}$$

Необходимо выбрать $C_1, \ldots, C_N$ так, чтобы получить невязку, наименее уклоняющуюся от нуля.

Метод коллокаций. Выберем в области Ω N точек $\{x^j\}$, $j = 1, \ldots, N$, и потребуем, чтобы в этих точках невязка была равна нулю:

$$\delta(x^j, C_1, \ldots, C_N) = 0, \qquad j = 1, \ldots, N. \tag{2.134}$$

Приходим к системе N уравнений с N неизвестными. Если краевые условия (2.124) линейны, то линейной является и соответствующая структура (2.132). Если при этом линейно и уравнение $Au = f$, то (2.134) есть система линейных алгебраических уравнений.

Правомерность метода коллокаций многими исследователями ставится под сомнение. Прежде всего, из равенства нулю невязки в

N точках не следует, что невязка мала в остальных точках Ω. Более того, если невязка достаточно велика лишь в сколь угодно малой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$, приближенное решение может сколь угодно сильно отличаться от точного. Например, краевая задача для уравнения $y'' = 0$ в $[-1, 1]$ с краевыми условиями $y(\pm 1) = 0$ имеет точное решение $y_0 \equiv 0$. Если в качестве приближенного решения принять функцию

$$y_1 \equiv \begin{cases} C\left(1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)^3, & |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0 & , |x| > \varepsilon, \end{cases} \tag{2.135}$$

$y \in C^2[-1, 1]$, то невязка будет отлична от нуля только на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. В то же время $\max |y_0 - y_1| = C$.

Кроме того, в методе коллокаций неясен вопрос о том, как следует выбирать точки x^j.

Однако, несмотря на эти замечания, метод коллокаций привлекателен простотой вычислений, а также тем, что на практике после вычисления постоянных C_j обычно нетрудно проследить характер невязки вне точек x^j и сделать заключение о погрешности решения.

Метод коллокаций допускает различные модификации. Одна из них состоит в том, что выбирается $N_1 > N$ точек коллокации x^j, а постоянные C_j находятся по методу наименьших квадратов, т. е. из условия минимума функции

$$q(C_1, \ldots, C_N) = \sum_{j=1}^{N_1} \delta^2(x^j, C_1, \ldots, C_N). \tag{2.136}$$

Если краевая задача линейна, то соответствующая система уравнений

$$\frac{\partial q}{\partial C_k} = 2 \sum_{j=1}^{N_1} \delta(x^j, C_1, \ldots, C_N) \frac{\partial \delta(x^j, C_1, \ldots, C_N)}{\partial C_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{2.137}$$

также является линейной. Другой вариант метода коллокаций получим, если потребуем, чтобы в точках x^j были равны нулю невязка и ее производные до некоторого порядка.

М е т о д   н а и м е н ь ш и х   к в а д р а т о в. Потребуем, чтобы квадрат нормы невязки

$$I(C_1, \ldots, C_N) = \|\delta(x, C_1, \ldots, C_N)\|^2_{L_2} = \int_\Omega \delta^2(x, C_1, \ldots, C_N)\, dx \tag{2.138}$$

был минимален в пространстве $L_2(\Omega)$. Соответствующая система уравнений для отыскания C_j имеет вид

$$\frac{\partial I}{\partial C_k} = 2 \int_\Omega \delta(x, C_1, \ldots, C_N) \frac{\partial \delta(x, C_1, \ldots, C_N)}{\partial C_k}\, dx = 0, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{2.139}$$

Если, как это обычно необходимо делать на практике, для вычисления интегралов прибегнуть к квадратурной формуле

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j f(x^j),$$

то придем к системе

$$\sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j \delta(x^j, C_1, \ldots, C_N) \frac{\partial \delta(x^j, C_1, \ldots, C_N)}{\partial C_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{2.140}$$

совпадающей с точностью до весовых коэффициентов α_j с системой (2.137) обобщенного метода коллокаций.

Метод Бубнова — Галеркина определяется условием об ортогональности невязки системе функций $\chi_k(x)$ из (2.132):

$$(\delta(x, C_1, \ldots, C_N), \chi_k) = \int_{\Omega} \delta(x, C_1, \ldots, C_N)\,\chi_k(x)\,dx = 0, \tag{2.141}$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Если уравнение $Au = f$ линейное, то (2.141) является системой линейных алгебраических уравнений. Модификация метода Бубнова — Галеркина (метод Петрова) состоит в замене системы $\{\chi_k\}$ некоторой другой полной в $L_2(\Omega)$ системой функций $\{\psi_k\}$. В частности, в качестве функций $\{\psi_k\}$ удобно взять характеристические функции областей Ω_k, $\bigcup_{k=1}^{N} \Omega_k = \Omega$ (или финитные функции $\alpha_k(x) \geqslant 0$ с носителями Ω_k). В этом случае система уравнений принимает вид

$$\int_{\Omega_k} \alpha_k \delta(x, C_1, \ldots, C_N)\,dx = 0, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{2.142}$$

и после применения теоремы о среднем оказывается эквивалентной системе (2.134) метода коллокаций.

Применение описанных методов обеспечивает сходимость в среднем, а в некоторых случаях — равномерную сходимость к решению краевой задачи. Для улучшения типа сходимости можно вместо скалярного произведения (и соответствующей нормы) в $L_2(\Omega)$ воспользоваться скалярным произведением пространства Соболева $H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega)$:

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=s} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)}, \quad s > 2. \tag{2.143}$$

(Естественно, что это существенно усложняет вычислительную сторону дела.)

Энергетические методы. Часто краевую задачу сводят к вариационной задаче о минимуме функционала $I(u)$, руководствуясь тем или иным энергетическим принципом, характеризующим данное физическое поле.

Если краевые условия (2.124) линейны и однородны, то множество функций, удовлетворяющих им, образуют линейное пространство $X(\Omega)$. Предположим, что оператор A положителен на $X(\Omega)$: $(Au, u) > 0$, $\forall u \in X(\Omega)$, $u \not\equiv 0$. Величина (Au, u) в этом случае часто оказывается пропорциональной энергии, необходимой для возбуждения поля $u(x)$. Поле, соответствующее уравнению $Au = f$, сообщает минимум функционалу [38]

$$I(u) = (Au, u) - 2(u, f) = \|u\|_A^2 - 2(u, f). \tag{2.144}$$

Подставим (2.132) в (2.144) и учтем, что в этом случае в силу однородности краевых условий $\chi_0(x) \equiv 0$, тогда

$$I(C_1, \ldots, C_N) = \left\| \sum_{j=1}^{N} C_j \chi_j \right\|_A^2 - 2 \sum_{j=1}^{N} C_j (\chi_j, f). \tag{2.145}$$

Приравняв нулю частные производные $\frac{\partial I}{\partial C_k}$, получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} (A\chi_j, \chi_k) C_j = (\chi_k, f), \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{2.146}$$

называемую **системой Ритца.** Определитель этой системы — определитель Грама — отличается от нуля, если система $\{\chi_j\}$ линейно независима [38]. Если к тому же система $\{\chi_j\}$ полна в $X(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_A$ и выполняется условие коэрцитивности $(Au, u) \geqslant \gamma \|u\|^2$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$ (т. е. оператор A является положительно определенным на $X(\Omega)$), то существует единственное решение u_0 краевой задачи и

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} C_j \chi_j - u_0 \right\|_A \to 0 \tag{2.147}$$

при $n \to \infty$ [29, 38]. Нетрудно заметить, что система Ритца (2.146) эквивалентна системе, используемой в методе Бубнова — Галеркина. Преимущество системы Ритца состоит в том, что в этом случае из условия симметричности $(Au, v) = (u, Av)$ оператора A следует возможность преобразовать коэффициенты $(A\chi_j, \chi_k)$ к симметричному виду $[\chi_j, \chi_k]$ с понижением порядка дифференцирования функций χ_j [38].

Метод Ритца, определяемый формулой (2.144), можно рассматривать как частный случай **метода Куранта**, который позволяет получать более сильную сходимость, чем (2.144). В этом случае минимизируется функционал

$$\Phi(u) = (Au, u) - 2(u, f) + \|Au - f\|_{H^s(\Omega)}^2, \quad s \geqslant 0, \tag{2.148}$$

где

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant s} (D^\alpha u, D^\alpha u)_{L_2(\Omega)}. \tag{2.149}$$

Если краевая задача линейна, то метод Куранта также приводит к линейной системе алгебраических уравнений.

При рассмотрении конкретных физико-механических полей к аналогичным, а иногда и более сильным результатам приводит использование вариационных принципов, таких, как, например, принципы Лагранжа и Клапейрона в механике, смешанный принцип стационарности Е. Рейснера и др. [32].

Разностно-аналитический метод. Возьмем некоторую систему $A_h^j u = f^j$, $j = 1, \ldots, N_1$; $N_1 > N$, конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение $Au = f$. Подставим в эту систему структуру (2.131) и получим систему N_1 уравнений относительно N постоянных C_i

$$A_h^j B_1(x, C_1, \ldots, C_N) = f^j, \qquad j = 1, \ldots, N_1, \tag{2.150}$$

которую решим методом наименьших квадратов [38].

Перечисленные методы могут сочетаться с различными итерационными методами, методами оптимизации (градиентного типа, случайного поиска), сводиться к задачам линейного или нелинейного программирования и т. п. [8]. Для некоторых классов задач весьма эффективным является метод Л. В. Канторовича [19], с помощью которого краевая задача приводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод Трефтца. Предположим, что $u = B$ (Ф) — полная структура, учитывающая лишь основное уравнение $Au = f$. (Формулу такого вида принято называть **общим решением** краевой задачи.) В этом случае (2.132) при любом выборе постоянных C_i удовлетворяет уравнению $Au = f$ и, следовательно, остается так выбрать эти постоянные, чтобы наилучшим образом удовлетворить граничным условиям. Для этой цели можно применить целый ряд методов из числа приведенных выше. На практике чаще всего применяют тот или иной вариант метода коллокаций, требуя, чтобы граничные условия удовлетворялись на некоторой системе точек границы рассматриваемой области.

2. Эффективность использования структурных формул в сочетании с приведенными методами существенно зависит от выбора аппроксимирующих полиномов ψ_i (2.130). Оператор B структуры, воздействуя на эти полиномы, «деформирует» их в последовательность $\{\chi_i\}$ (2.132), и поэтому от аппроксимативных свойств функций $\{\chi_i\}$ существенно зависит характер приближения к решению краевой задачи. От последовательности $\{\chi_i\}$ зависит также обусловленность и некоторые другие характеристики матрицы $\{a_{ij}\}$ системы алгебраических уравнений для определения постоянных C_i. В частности, если число N постоянных C_i велико, то объем вычислений может оказаться неприемлемым из-за того, что оперативная память используемой ЭВМ не вместит всех элементов матрицы $\{a_{ij}\}$. Многие из упоминавшихся методов таковы, что коэффициенты a_{ij} являются интегралами (или суммами с большим числом слагаемых) по области Ω. Эти трудности можно в значительной мере уменьшить, если в качестве функций ψ_i выбирать финитные функции с носителями малого диаметра. Тогда число ненулевых элементов матрицы $\{a_{ij}\}$ составит

не N^2, как в общем случае, а αN, $\alpha = \text{const}$. Их доля в общем числе элементов будет равна $\frac{\alpha}{N}$ и, следовательно, уменьшается с ростом N. Кроме того, вычисление каждого коэффициента матрицы $\{a_{ij}\}$ состоит в вычислении интеграла не по всей области Ω, а только по пересечениям носителей функции ψ_i. Правда, при этом выигрыш будет лишь в том случае, если с уменьшением области интегрирования не придется уменьшать его шаг. Это предъявляет дополнительные требования к функциям ψ_i, а именно: под знак интегралов, через которые выражены коэффициенты a_{ij}, функции ψ_i входят сомножителями вида $Q\psi_i$, $R\psi_j$, где Q и R — известные линейные дифференциальные операторы, порядок которых зависит от порядка уравнения $Au = f$ и выбранного метода. Поэтому, чтобы конструктивный аппарат не зависел от порядка краевой задачи, желательно иметь возможность легко вычислять значения не только функций ψ_i, но и их производных до любого порядка. Кроме того, поскольку квадратурные формулы обычно ориентируются на аппроксимацию подынтегральных функций (не считая весовых) полиномами, то желательно, чтобы легко вычислялись и интегралы от произведений этих функций на полиномы (т. е. их моменты).

Среди финитных функций хорошими аппроксимационными свойствами обладают финитные сплайны Шенберга — кусочные полиномы порядка s из класса C^{s-1} [1, 7]. Они просты в вычислительном отношении и удовлетворяют ряду других упомянутых выше требований. Однако порядок сплайнов, выбираемых для решения задачи, зависит от порядка производных операторов Q и R. Серьезным недостатком сплайнов является также то, что множество сплайнов порядка $n + 1$ не включает множества сплайнов меньших порядков. Это препятствует применению итерационных методов, в которых переход к последующим итерациям сопряжен с повышением порядка сплайнов.

Оказывается, что все эти трудности удается преодолеть с помощью атомарных функций (см. гл. 3).

§ 7. УЧЕТ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СТРУКТУР РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Во многих случаях важную информацию о решении краевой задачи можно получить еще до организации его поиска. Это, например, может быть информация о симметрии решения, если постановка краевой задачи инвариантна относительно некоторых типов преобразований симметрии; о зонах больших или малых градиентов и кривизн решения; о характере поведения решения в окрестности угловых и других «особых» точек границы — разрыва граничных условий, коэффициентов основного уравнения, расположения сосредоточенных возбудителей поля и т. д. Такие сведения о решении могут быть получены из качественных теорий, из решений близких по постановке задач, на основе экспериментальных данных или инженерной интуиции. Естественно, что правильный учет подобной информации может существенным образом сократить затраты на получение приближенного решения и улучшить его качество. Кроме того, в ряде случаев решение краевой задачи таково, что имеется возможность осуществить его некоторый этап с помощью того или иного классического метода (интегральных преобразований, разложения по малому параметру, разделения переменных, функций Грина и др.) и тем самым существенно упростить поиск приближенного решения.

Стремление учесть априорную информацию характерно для исследований по самым различным приближенным методам. Так, например, в сеточных методах и методе конечных элементов густота сетки выбирается большей или меньшей в различных зонах в зависимости от предполагаемого характера поведения решения или особенностей основного уравнения и краевых условий; при использовании итерационных методов начальное приближение выбирается из соображений наибольшего правдоподобия; в ряде случаев из решения выделяется «функция особенностей» и задача сводится к поиску его регулярной части и т. д.

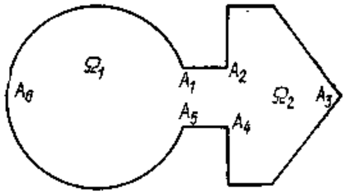

Рис. 6

Метод R-функций, являясь аналитическим, содержит в себе богатые конструктивные возможности для того, чтобы уже на уровне структурных формул полнее учесть информацию об искомом решении.

Пусть Ω — область, в которой будем искать решение краевой задачи. Во многих случаях в ней можно выделить такие подобласти (регионы) Ω_i, в которых решение в основном определяется геометрией ближайших участков границы и заданными на них краевыми условиями или местными значениями коэффициентов и правых частей основного уравнения. Такая ситуация возникает, например, при решении задачи об изгибе тонкой пластинки (рис. 6), которая свободно оперта вдоль участка $\partial\Omega_1 = A_1A_2A_3A_4A_5$ границы и защемлена на остальной части границы $\partial\Omega_2 = A_5A_6A_1$.

Из физических соображений ясно, что изменение интенсивности поперечной нагрузки в каждой из подобластей Ω_i в основном влияет на прогиб в этой подобласти и в значительно меньшей степени — на прогиб в другой. Для учета подобных явлений может быть использован регионально-структурный метод [46], позволяющий строить такие структурные формулы, в которых каждой из неопределенных компонент Φ_i (или их системе) соответствует свой регион Ω_i, где эта компонента или система проявляет наибольшее влияние на формирование приближенного решения. Этот метод представляет такое же логическое продолжение структурного метода, как метод конечных элементов в развитии методов конечно-разностного типа. Как и в методе конечных элементов, в регионально-структурном методе допускается возможность учета априорной информации о поведении искомых функций в различных регионах Ω_i, вызываемом разными физическими или геометрическими факторами. Так же, как и для метода конечных элементов, для регионально-структурного метода большое значение приобретают точные решения, которые удается получать для задач, близких по тем или иным признакам к рассматриваемой задаче. Кроме того, здесь могут учитываться и результаты, полученные экспериментальным путем или из различного рода инженерных соображений. Опишем два основных подхода, на которых базируется регионально-структурный метод.

1. Пусть $u = B(\Phi)$ — некоторая структура решения, а $\{\Omega_i\}$, $i = 1, \ldots, s$,— некоторое покрытие области Ω, где Ω_i — подобласти (регионы), выбираемые из априорных соображений. Предположим, что каждая точка области Ω является внутренней по крайней мере для одного из регионов Ω_i. Пусть $\Omega_i = [\omega_i(x) \geqslant 0]$, $\omega_i \in \mathfrak{M}(H)$, $H \subset C^m(\mathbb{R}^n)$. Тогда функции

$$\sigma_i(x) = \frac{1}{2}[|\omega_i(x)| + \omega_i(x)]\,\omega_i^m(x) \qquad (2.151)$$

являются финитными из $C^n(\mathbb{R}^n)$ с носителями Ω_i, а функции

$$\tau_i(x) = \sigma_i(x)\left[\sum_{i=1}^{s}\sigma_i(x)\right]^{-1},$$

кроме того, дают в области Ω разложение единицы:

$$\sum_{i=1}^{s}\tau_i(x) \equiv 1, \quad \forall x \in \Omega. \qquad (2.152)$$

Нетрудно заметить, что в подобласти $\Omega_i^0 \subset \Omega_i$, не пересекающейся с другими регионами, $\tau_i(x) \equiv 1$. Назовем Ω_i^0 главной частью Ω_i. Неопределенную компоненту Φ, входящую в структуру $u = B(\Phi)$, представим в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^{s}\tau_i\Phi_i \quad \text{или} \quad \Phi = \sum_{i=1}^{s}\sigma_i\Phi_i, \qquad (2.153)$$

где Φ_i — новые неопределенные функции. Нетрудно заметить, что каждая из неопределенных компонент Φ_i не оказывает влияния на структуру вне пределов региона Ω_i. (Вместо рассмотренных финитных функций можно выбрать также функции, быстро убывающие за пределами соответствующих регионов. Формула (2.7) является одним из удобных вариантов такого подхода.)

Если структура $Q_i(\Phi^i)$ учитывает краевое условие на $\partial\Omega_i$ и $\partial\Omega_i = \partial\Omega \cap \Omega_i^0$, где Ω_i^0 — главная часть региона $\Omega_i = [\tau_i(x) \geqslant 0]$, $\tau_i(x) \equiv 1$ в Ω_i^0, то вместо формулы (2.153) можно воспользоваться формулой

$$u = \frac{Q_1(\Phi^1)\tau_1 + \cdots + Q_s(\Phi^s)\tau_s + \Phi^{s+1}\tau_0}{\tau_1 + \cdots + \tau_s + \tau_0}, \qquad (2.154)$$

где m — высший порядок краевых условий, а $\tau_0(x)$ — финитная функция с носителем Ω_0, состоящим из внутренних точек Ω и таким, что всякая точка Ω является внутренней по крайней мере для одной из областей $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_s$. Очевидно, что в каждой из главных частей Ω_i^0 регионов Ω_i $u=Q_i(\Phi^i)$, $i = 1, \ldots, s$. Это позволяет в областях Ω_i^0 производить вычисления не по громоздкой формуле (2.154), а по формулам $u = Q_i(\Phi^i)$.

2. Описанный подход можно использовать для разделения «сфер влияния» неопределенных компонент на пограничную и внутреннюю подобласти области Ω.

Пусть $\Omega = [\omega(x) \geqslant 0]$, $\omega \in C^m(\Omega)$ и $\omega(x) = 0$, — нормализованное уравнение $\partial\Omega$. Функция

$$\tau_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}[|\varepsilon - \omega(x)| + \varepsilon - \omega(x)][\varepsilon - \omega(x)]^m \tag{2.155}$$

является финитной из класса $C^m(\Omega)$ с носителем Σ_ε, почти совпадающим с ε-окрестностью границы $\partial\Omega$. Легко убедиться в том, что функция

$$\omega_\varepsilon(x) = \tau_\varepsilon(x)\,\omega(x)\,[\tau_\varepsilon(x) + \omega^{m+1}(x)]^{-1} \tag{2.156}$$

также является финитной из класса $C^m(\Omega)$ с тем же носителем и, кроме того, удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} \omega_\varepsilon(x)|_{\partial\Omega} = 0; \\ \left.\frac{\partial\omega_\varepsilon(x)}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 1; \\ D^\alpha\omega_\varepsilon(x)|_{\partial\Omega} = D^\alpha\omega(x)|_{\partial\Omega}, \ |\alpha| \leqslant m. \end{gathered} \tag{2.157}$$

Другими словами, функция $\omega_\varepsilon(x)$ на $\partial\Omega$ ведет себя, с точностью до величин порядка $\omega^{m+1}(x)$, как и функция $\omega(x)$.

В § 4 показано, что формулы для структур решений (или пучков) имеют вид разложений по степеням ω. При этом во всех случаях при старшей степени ω, на единицу большей наивысшего порядка краевых условий на $\partial\Omega$, стоит неопределенная компонента, не входящая в другие члены рассматриваемой формулы. Это означает, что структурную формулу можно представить в виде

$$u = B(\Phi_1, \ldots, \Phi_{s-1}) + \omega^m(x)\,\Phi_s. \tag{2.158}$$

Если в выражении $B(\Phi_1, \ldots, \Phi_{s-1})$ заменить $\omega(x)$ на $\omega_\varepsilon(x)$, то в соответствии с (2.157) формула (2.158) будет удовлетворять прежним краевым условиям. При этом в области $\Omega \cap \overline{\Sigma}_\varepsilon$ все слагаемые, содержащие неопределенные компоненты $\Phi_1, \ldots, \Phi_{s-1}$, тождественно равны нулю. Однако полнота структуры не нарушается, поскольку, каковы бы ни были значения функции u в области $\Omega \cap \overline{\Sigma}_\varepsilon$, можно Φ_s выбрать таким, что в этой области формула (2.158) превратится в тождество. Следовательно, для слагаемого $B(\Phi_1, \ldots, \Phi_{s-1})$ зоной влияния является пограничная зона Σ_ε, а для слагаемого $\omega^m \Phi_s$ — в основном внутренняя подобласть $\Omega \cap \overline{\Sigma}_\varepsilon$.

Другие модификации регионально-структурного метода, учитывающие специфику некоторых типов краевых задач, рассмотрены в работе [46].

Замечание 1. Важное значение имеет учет характера поведения точного решения в окрестности угловых и других особых точек границы $\partial\Omega$. Исследованию особенностей решения вблизи таких точек посвящены работы [12, 49]. Построение структур решений с заданным характером поведения в окрестности особых точек независимо от выбора неопределенных компонент в общем случае является сложной задачей. Этот вопрос должен решаться с учетом постановки и специфики каждой конкретной задачи или, по крайней мере, достаточно узкого класса задач. Такие частные рекомендации для задач чистого кручения стержней приведены в работе [12], для контактных задач теории упругости — в работе [49]. Вопросы полноты и качества структур, в которые привнесены особенности, характерные для точного решения, мало исследованы.

Замечание 2. Во многих случаях решение краевой задачи зависит от ряда конструктивных, физических или других параметров $a_1, \ldots, a_k$. Представляет интерес разработка таких приближенных методов, которые позволили бы получать приближенные решения в виде формул, содержащих эти параметры в буквенном виде. В некоторых частных случаях это удается сделать [46, 70]. Кроме того, если для отдельных значений a_i решение известно, то целесообразно использовать его при построении структурных формул. Рекомендации по этому вопросу содержатся в работе [42].

Замечание 3. Как известно, гладкость решения краевой задачи существенно зависит от гладкости правой части основного уравнения $Au = f$. Функция f характеризует распределение возбудителей поля, которые часто имеют вид сосредоточенных источников, терпят разрывы или имеют другие особенности. Необходимость учитывать такого рода информацию при применении приближенных методов создает значительные трудности. Например, в методах сеток или конечных элементов в окрестности особых точек приходится дробить шаги, в вариационных методах — увеличивать число координатных функций. Поэтому представляют интерес методы, направленные на увеличение гладкости f.

Как показано в работе [42], располагая нормализованным уравнением $\omega = 0$ границы области, для широкого класса краевых задач можно «смягчить» поведение возбудителей поля, заменив рассматриваемую краевую задачу задачей с теми же краевыми условиями, но с измененной правой частью основного уравнения. Ю. А. Тимофеев указал возможность использования для этой же цели структурного метода. Идею этого метода изложим на примере. Пусть $f \equiv f_1$ в $\Omega_1 \subset \Omega$, $f_1 \in C^m(\Omega_1)$, $f \equiv f_2$ в $\Omega \cap \overline{\Omega}_1$, $f_2 \in C^m(\Omega \cap \overline{\Omega}_1)$, $\omega = 0$ — уравнение $\partial\Omega$, а $\omega_1 = 0$ — нормализованное уравнение

$\partial\Omega_1$. Чтобы устранить разрыв, который имеет функция f на $\partial\Omega_1$, представим решение u в виде $u = v + \omega^{k+1}\Psi$, где k — максимальный порядок краевых условий в данной задаче на $\partial\Omega$. Тогда функция v удовлетворяет тем же краевым условиям, что и функция u, но для v получаем уравнение $Av = f - A(\omega^{k+1}\Psi) \equiv f_0$. Применив структурный метод, можем выбрать Ψ так, чтобы выполнялись условия

$$D_s[f_1 - A(\omega^{k+1}\Psi)]|_{\omega_1=-0} = D_s[f_2 - A(\omega^{k+1}\Psi)]|_{\omega_1=+0},$$
$$s = 0, 1, \ldots, m.$$

В результате получим уравнение $Av = f_0$, $f_0 \in C^m(\Omega)$, с требуемой степенью гладкости m.

ГЛАВА 3

АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Важную роль в теории приближений и численных методах играют алгебраические и тригонометрические (экспоненциальные) полиномы. Однако этот универсальный аппарат приближения имеет следующий (существенный для практики) недостаток — «нефинитность» классических полиномов. В численных же методах часто желательно применять «локальные» (т. е. финитные) функции с носителями малого диаметра, так как (см. § 6 гл. 2) в этом случае в соответствующих матрицах большинство элементов равны нулю, матрица — «редкая» или даже «ленточная» и при том же объеме оперативной памяти ЭВМ можно использовать аппроксимирующие подпространства более высоких размерностей, а следовательно, получить более точные приближения. Известные и широко применяемые [7, 17, 18, 71, 83, 88, 90] локальные функции-сплайны (например, B-сплайны Шенберга) не универсальны в том смысле, что для получения оптимального приближения функций большей гладкости нужны сплайны более высокой степени. Таким образом, классические алгебраические и тригонометрические полиномы универсальны, но не локальны, сплайны же локальны, но не универсальны. Естественно, возникает вопрос о построении пространств функций, которые были бы одновременно локальны и универсальны. Желательно к тому же, чтобы их можно было легко вычислять. Функции, о которых речь идет ниже, на наш взгляд, настолько просты и удобны в работе, что ими целесообразно пополнить класс «элементарных» функций.

Как же построены эти функции? Так как неуниверсальность сплайнов обусловлена уже их недостаточной гладкостью, то необходимо рассмотреть бесконечно дифференцируемые финитные функции. Финитные сплайны степени n, как хорошо известно,— это n-кратные свертки характеристических функций интервалов; эти финитные функции — бесконечнократные свертки характеристических функций интервалов. Для получения финитных функций длины интервалов должны достаточно быстро стремиться к нулю (сумма длин должна быть конечной). Если $\varphi(x)$ — искомая функция и

$\hat{\varphi}(t)$ — ее фурье-образ, то

$$\hat{\varphi}(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k t}{\alpha_k t};$$

здесь α_k монотонно стремятся к нулю, $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$. Теперь из всех монотонно стремящихся к нулю последовательностей $\alpha = \{\alpha_k\}$ выберем те, для которых $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x)$ обладает достаточно хорошими аппроксимационными свойствами. По-видимому, наиболее простой и удобной будет функция $\varphi(x)$, соответствующая геометрической прогрессии $\alpha_k = 2^{-k}$. Такой выбор α_k по крайней мере естествен. Обозначим эту функцию $\mathrm{up}(x)$. Таким образом,

$$\mathrm{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt.$$

Первоначально функция $\mathrm{up}(x)$ появилась при следующих обстоятельствах. В 1967 г. В. Л. Рвачев поставил такую задачу. Если $\varphi(x)$ — финитная дифференцируемая функция, имеющая один участок возрастания и один участок убывания («горб»), то ее производная $\varphi'(x)$ состоит из «горба» и «ямы». Существует ли функция $\varphi(x)$, у которой «горб» и «яма» производной подобны «горбу» самой функции? На языке уравнений это означает: существует ли финитное решение уравнения $y'(x) = a[y(2x+1) - y(2x-1)]$, в котором для определенности считаем, что носитель $\varphi(x)$ — отрезок $[-1, 1]$?

В работе [52] доказаны существование и единственность такого финитного решения с интегралом, равным 1, — это и есть функция $\mathrm{up}(x)$. Таким образом, в то время как классические алгебраические и тригонометрические полиномы удовлетворяют однородным линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, функция $\mathrm{up}(x)$ (и другие аналогичные функции) удовлетворяет уравнениям вида

$$Ly(x) = \sum_{k=1}^{M} c_k y(ax - b_k),$$

где L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Эти уравнения близки к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами в том смысле, что преобразование Фурье для них «работает» так же эффективно. Наблюдавшееся до сих пор некоторое невнимание к этим уравнениям и их решениям обусловлено, по-видимому, отсутствием их непосредственной физической интерпретации. В данной главе рассматриваются финитные решения (названные атомарными функциями) указанных выше уравнений с точки зрения их возможной применимости в конструктивной теории функций и численном анализе.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Атомарные функции — это финитные решения дифференциально-функциональных уравнений вида

$$Ly(x) = \lambda \sum_{k=1}^{M} c_k y(ax - b_k), \tag{3.1}$$

где $a > 1$, L — линейный обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Обозначим оператор

$$y(x) \to \sum_{k=1}^{M} c_k y(ax - b_k)$$

через R. Первый вопрос, который необходимо выяснить: какие условия нужно наложить на L и R, чтобы уравнение (3.1) для некоторых $\lambda \neq 0$ имело ненулевое финитное решение?

Пусть $L = P(D)$, где $D = -i \frac{d}{dx}$, а

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} d_k \lambda^k.$$

Применим к обеим частям (3.1) преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} Ly(x)\, dx = \lambda \sum_{k=1}^{M} c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} y(ax - b_k)\, dx.$$

После очевидных выкладок получим

$$P(t)\, F(t) = \lambda \sum_{k=1}^{M} \frac{c_k}{a} e^{i \frac{tb_k}{a}} F\left(\frac{t}{a}\right), \tag{3.2}$$

где

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} y(x)\, dx.$$

Положим

$$\mathscr{E}(t) = \sum_{k=1}^{M} \frac{c_k}{a} e^{i \frac{tb_k}{a}}.$$

Рассмотрим сначала случай

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\, dx \neq 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$F(0) = 1. \tag{3.3}$$

Тогда из (3.2) следует $P(0)\, F(0) = \lambda \mathscr{E}(0)$, т. е.

$$d_0 = \lambda \mathscr{E}(0). \tag{3.4}$$

Пусть $P(\lambda) = d_f\lambda^f + \cdots + d_n\lambda^n$, где $d_f \neq 0$ $(d_0 = \cdots = d_{f-1} = 0)$. Тогда, последовательно дифференцируя (3.2) и полагая $t = 0$, получаем $f!d_f = \lambda\mathscr{G}^{(f)}(0)$, $\mathscr{G}^{(j)}(0) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant f-1$. Отсюда

$$\lambda = \frac{f!d_f}{\mathscr{G}^{(f)}(0)}. \tag{3.5}$$

Пусть $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — множество нулей многочлена $P(t)$ (с учетом кратности), $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots\}$ — множество нулей функции $\mathscr{G}(t)$ (также с учетом кратности). Из $P(t)F(t) = \lambda\mathscr{G}(t)F(ta^{-1})$ следует

$$P(t)F(t)P(ta^{-1}) = \lambda^2\mathscr{G}(t)\mathscr{G}(ta^{-1})F(ta^{-2}). \tag{3.6}$$

Так как (см. (3.2)) $P(ta^{-1})F(ta^{-1}) = \lambda\mathscr{G}(ta^{-1})F(ta^{-2})$, то, умножив (3.2) на $P(ta^{-1})$, получим (3.6)). Таким же образом получаем

$$F(t)\prod_{k=0}^{n} P(ta^{-k}) = \lambda^{n+1}\prod_{k=0}^{n}\mathscr{G}(ta^{-k})F(ta^{-n-1}). \tag{3.7}$$

Поскольку $a > 1$ и $F(0) \neq 0$, то начиная с некоторого n имеем $F(ta^{-n-1}) \neq 0$ (для данного t). Отсюда каждый нуль функции $P(ta^{-m})$ должен содержаться среди нулей функции $\mathscr{G}(ta^{-k(m)})$ для некоторого $k(m)$.

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием существования финитного ненулевого решения уравнения (3.1) $y(x)$ такого, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\,dx = 1,$$

является следующее условие (И): существует инъекция $i: A \to B$ такая, что для всякого $\alpha_j \in A$ существует натуральное m, для которого $i(\alpha_j) = a^{-m}\alpha_j \in B$. Коэффициент λ получается при этом из (3.5), а решение имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}F(t)\,dt,$$

где

$$F(t) = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda\mathscr{G}(ta^{-k})}{P(ta^{-k})}. \tag{3.8}$$

Доказательство. *Достаточность.* Нужно показать, что $F(t)$ — целая функция экспоненциального типа первого порядка роста: $|F(t)| < Ce^{k|t|}$ и $F_1(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, $|F(t)| < C_m t^{-m}$, $t \in \mathbb{R}$, $m \in N$. Тогда $y(x)$ по теореме Винера — Пэли — финитная функция, и выполнение уравнения (3.1) проверяется непосредственно.

Пусть $|t| \leqslant R$. Тогда начиная с некоторого N многочлен $P(ta^{-N})$ в круге $|t| \leqslant R$ нулей, отличных от $t = 0$, не имеет. Следовательно, $\frac{\lambda \mathfrak{g}(ta^{-k})}{P(ta^{-k})}$ при $k > N$ — аналитическая в круге $|t| \leqslant R$ функция и

$$\psi(t) = \prod_{k=N}^{\infty} \frac{\lambda \mathfrak{g}(ta^{-k})}{P(ta^{-k})}$$

— также целая функция [21, с. 11, теорема 2]. Это следует из того, что ряд

$$\sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{\lambda \varepsilon (ta^{-k})}{P(ta^{-k})} - 1 \right)$$

равномерно сходится в $|t| \leqslant R$, поскольку

$$\left| \frac{\lambda E (ta^{-k})}{P(ta^{-k})} - 1 \right| < \frac{C_p}{a^k}.$$

В силу условия (И) каждому нулю знаменателя в (3.8) соответствует свой нуль числителя, так что функция

$$F(t) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{\lambda E (ta^{-k})}{P(ta^{-k})} \psi(t)$$

также аналитическая в $|t| \leqslant R$ и, следовательно, целая, так как R — любое.

Пусть $\mu = \max\limits_{|t|<a^2R} |F(t)|$, где $R = \max|\alpha_k|$. Тогда

$$|F(t)| \leqslant \left| \prod_{j=0}^{q_0} \frac{\lambda E(ta^{-j})}{P(ta^{-j})} \right| \mu;$$

$$q_0 = \left[\log_a \frac{|t|}{a^2R} \right] + 1.$$

Пусть $\nu = \min\limits_{|t|>aR} |P(t)| > 0$. Тогда при $|t| > aR$

$$|F(t)| < \mu \left(\frac{|\lambda| \sum\limits_{k=1}^{M} \left| \frac{c_k}{a} \right|}{\nu} \right)^{q_0} e^{|t| \frac{\max|b_k| a}{1-a}} < Ce^{K|t|}.$$

Рассмотрим поведение $F(t)$ на действительной оси. Пусть $\mu_A = \max\limits_{|t|<A} |F(t)|$, $t \in R$, $A \geqslant T$; T выбирается из соотношения $|P(t)| > \frac{d_n}{2}|t|^n$ при $|t| \geqslant T$ и $l = |\lambda| \sum\limits_{k=1}^{M} \frac{|c_k|}{a}$. Тогда из

$$F(t) = \frac{\lambda \varepsilon(t)}{P(t)} F\left(\frac{t}{a}\right)$$

следует

$$|F(t)| < \frac{2l}{d_n |t|^n} \mu_A$$

при $A < |t| < aA$, $t \in \mathbb{R}$. Если

$$A > \gamma > \sqrt[n]{\frac{2l}{d_n}},$$

то $|F(t)| < \rho\mu_A$, где $0 < \rho < 1$. Следовательно, $\mu_{aA} = \mu_A$ и

$$|F(t)| < \frac{2l}{d_n |t|^n} \mu_a$$

для $A < t < a^2A$. Таким образом,

$$|F(t)| < \frac{2l}{d_n |t|^n} \mu_A$$

для всех $|t| > A$, $t \in \mathbb{R}$. Несложной модификацией этих рассуждений можно показать, что $F(t)$ на действительной оси убывает быстрей любой степени t^{-n}. В самом деле, как уже показано ранее, на действительной оси $|F(t)|$ ограничена, а

$$F(t) = \prod_{j=0}^{s} \frac{\lambda \mathcal{E}(ta^{-j})}{P(ta^{-j})} F(ta^{-s-1}).$$

Таким образом, $y(x)$ — действительно финитная функция класса C^∞. Достаточность доказана.

Необходимость. Из того, что $y(x)$ финитна, следует, что $F(t)$ — целая. Поэтому должна существовать инъекция

$$\gamma : \bigcup_{k=0}^{\infty} a^k A \to \bigcup_{k=0}^{\infty} a^k B$$

(здесь $a^k A = \{a^k\alpha_1, \ldots, a^k\alpha_n\}$, аналогично понимается a^kB, объединение здесь и далее считается дизъюнктивным). Действительно, каждое $\mu \neq 0$, $\mu \in \mathbb{C}$, в множествах $\bigcup_{k=0}^{\infty} a^kA$ и $\bigcup_{k=0}^{\infty} a^kB$ может встречаться только конечное число раз, т. е.

$$\mu \in \bigcup_{k=0}^{N_1} a^kA \quad \text{и} \quad \mu \notin \bigcup_{k=N_1+1}^{\infty} a^kA,$$

$$\mu \in \bigcup_{k=0}^{N_2} a^kB \quad \text{и} \quad \mu \notin \bigcup_{k=N_2+1}^{\infty} a^kB.$$

(Случай $\mu = 0$ не вызывает затруднений, так как выше показано, что для $\mathcal{E}(t)$ $\mu = 0$ — нуль того же порядка, что и для $P(t)$). Тогда из (3.7) при $n > \max(N_1, N_2)$ следует, что μ встречается в $\bigcup_{k=0}^{\infty} a^kA$ не чаще, чем в $\bigcup_{k=0}^{\infty} a^kB$ (так как $F(\mu a^{-n-1}) \neq 0$ для достаточно больших n), и, следовательно, инъекция γ существует.

Положим

$$S_0 = \{\alpha_i : \alpha_i a^{-k} \notin A,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$S_1 = \{\alpha_i \in A \setminus S_0 : \alpha_i a^{-k} \notin A \setminus S_0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\},$$

$$S_2 = \{\alpha_i \in A \setminus S_0 \cup S_1 : \alpha_i a^{-k} \in A \setminus S_0 \cup S_1,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\};$$

. . . .

S_l — последнее непустое S_j. Необходимо по инъекции

$$\gamma : \bigcup_{k=0}^{\infty} a^k A \to \bigcup_{k=0}^{\infty} a^k B$$

построить инъекцию i. Начнем с $\alpha_j \in S_0$. Каждому из них инъективно ставим в соответствие $i(\alpha_j) \in B$, а именно: $\gamma(\alpha_j) = a^m \beta_s$. Положим $i(\alpha_j) = \beta_s$. Инъективность очевидна.

Теперь перестроим γ в γ_1 следующим образом. Пусть $\alpha_{j_r} \in S_0$, $r = 1, \ldots, r^*$. Расположим j_r в некотором порядке. Рассмотрим $a^k \alpha_{j_r}$, $k = 1, 2, \ldots$. Положим для $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} a^k A$, где $\gamma_{1,0} = \gamma$,

$$\gamma_{1,r}(\mu) = \begin{cases} \gamma_{1,r-1}(\mu), & \text{если} \quad \mu \neq a^k \alpha_{j_r} \quad \text{и} \quad \gamma_{1,r-1}(\mu) \neq a^l i(\alpha_{j_r}); \\ a^l i(\alpha_{j_r}), & \text{если} \quad \mu = a^l \alpha_{j_r}; \\ \gamma_{1,r-1}(a^l \alpha_{j_r}), & \text{если} \quad \gamma_{1,r-1}(\mu) = a^l i(\alpha_{j_r}). \end{cases}$$

Пусть $\gamma_1 = \gamma_{1,r^*}$. Легко видеть, что для всех $\alpha_j \in S_0$ $\gamma_1(a^l \alpha_j) = a^l \gamma(\alpha_j)$.

Переходим к S_1. Полагаем $i(\alpha)$ для $\alpha \in S_1$ следующим образом. Пусть $\gamma_1(\alpha) = a^m \beta_s$. Тогда $i(\alpha) = \beta_s$. Перестроим инъекцию γ_1 в инъекцию γ_2 аналогично тому, как γ перестраивалась в γ_1. В конце концов получим требуемую инъекцию i. Теорема доказана.

В теореме 1 рассматривался случай, когда $F(0) = 1$. Пусть теперь $F(0) = 0$. Тогда $F(t) = t^r G(t)$, где $G(0) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $G(0) = 1$. Имеем

$$\mathcal{P}(t)\, t^r G(t) = \lambda \mathcal{E}(t)\, \frac{t^r}{a^r}\, G\left(\frac{t}{a}\right),$$

т. е.

$$\mathcal{P}(t)\, G(t) = \frac{\lambda}{a^r}\, \mathcal{E}(t)\, G\left(\frac{t}{a}\right) \tag{3.9}$$

и, следовательно, приходим к условиям теоремы 1 с заменой λ на λa^{-r}. Поэтому

$$\lambda = \frac{f!\, d_f a^f}{\mathcal{E}^{(f)}(0)}, \quad G(t) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda a^{-r} \mathcal{E}(ta^{-j})}{\mathcal{P}(ta^{-j})},$$

и

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} G(t)\, \mathrm{d}t \tag{3.10}$$

является решением уравнения

$$L\varphi(x) = \lambda a^{-r} \sum_{k=1}^{M} \frac{c_k}{a} \varphi(ax - b_k). \qquad (3.11)$$

Поскольку $F(t) = t^r G(t)$ — искомое решение уравнения (3.1), $y(x)$ имеет вид

$$y(x) = C\varphi^{(k)}(x). \qquad (3.12)$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием существования ненулевых финитных решений уравнения (3.1) является условие (И). При выполнении этого условия для

$$\lambda_l = \frac{a^l d_l f^l}{\mathscr{E}^{(l)}(0)}$$

существуют финитные решения $C\varphi_l(x)$, $l \in N$, где

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \mathscr{E}(ta^{-j})}{\mathscr{P}(ta^{-j})} dt, \quad \varphi_l(x) = \varphi_0^{(l)}(x).$$

Замечание. $\varphi_l(x)$ линейно независимы.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Исследуем подробно случай, когда $L = P(D)$, где

$$P(t) = -it + \alpha, \qquad (3.13)$$

$$R: y(x) \to c_1 y(ax - b_1) + c_2 y(ax - b_2). \qquad (3.14)$$

Тогда

$$\mathscr{E}(t) = \frac{c_1}{a} e^{i\frac{b_1 t}{a}} + \frac{c_2}{a} e^{i\frac{b_2 t}{a}}.$$

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда $\lambda\left(\frac{c_1}{a} + \frac{c_2}{a}\right) = \alpha$ и

$$\lambda = \frac{a\alpha}{c_1 + c_2}, \quad A = \{i\alpha\}. \qquad (3.15)$$

Исследуем нули $\mathscr{E}(t)$. Пусть $\mathscr{E}(t) = 0$. Тогда

$$e^{i\frac{(b_1 - b_2)t}{a}} = -\frac{c_2}{c_1}, \quad \beta = \frac{\operatorname{Ln}\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)a}{i(b_1 - b_2)}. \qquad (3.16)$$

Условие (И) означает, что существует $m \in N$ такое, что $i\alpha = \beta a^m$, т. е.

$$\alpha = \frac{\operatorname{Ln}\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)a^{m+1}}{b_2 - b_1}. \qquad (3.17)$$

Без ограничения общности можно считать $c_1 = 1$. Тогда

$$c_2 = -\exp\left[(b_2 - b_1)\alpha a^{-m-1}\right]. \qquad (3.18)$$

Таким образом, для данных b_1, b_2 и $\alpha \neq 0$ существует счетное число коэффициентов $c_{2,m}$, для которых (3.1), (3.13), (3.14) имеют ненулевые финитные решения.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда

$$c_1 + c_2 = 0,$$
$$\lambda\left(\frac{c_1}{a}\frac{ib_1}{a} + \frac{c_2}{a}\frac{ib_2}{a}\right) = -i. \qquad (3.19)$$

Положим для определенности $c_1 = 1$. При этом

$$\lambda = \frac{a^2}{b_1 - b_2}. \qquad (3.20)$$

Условие (И) означает, что существует $\beta = 0$. Нули функции $\mathcal{E}(t)$ даются формулой $\beta = \frac{\operatorname{Ln} 1 \cdot a}{i(b_1 - b_2)}$, среди них 0 действительно содержится.

Для $\alpha = 0$ получаем единственное решение с $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)\,dx = 1$, имеющее вид

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\prod_{j=0}^{\infty}\frac{a}{b_2 - b_1}\,\frac{e^{ib_1ta^{-j-1}} - e^{ib_2ta^{-j-1}}}{ta^{-j}}\,\mathrm{dt}. \qquad (3.21)$$

Сделав замену $x_1 = x - \frac{b_1 + b_2}{2}$, уравнение (3.1) с условиями (3.13) и (3.14) всегда можно привести к виду

$$y'(x) + \alpha y(x) = \lambda\,(c_1 y(ax - b_1) + c_2 y(ax + b_1)).$$

Подставив $x_2 = \mu x$, получим

$$y'(x) + \alpha y(x) = \lambda\,(y(ax - 1) + cy(ax + 1)). \qquad (3.22)$$

Для $\alpha = 0$ уравнение (3.22) имеет вид

$$y'(x) = \lambda\,(y(ax - 1) - y(ax + 1)). \qquad (3.23)$$

При этом

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sin ta^{-j}}{ta^{-j}}\,\mathrm{dt};\quad \lambda = -\frac{a^2}{2}. \qquad (3.24)$$

При $a = 2$ получаем $y(x) = \operatorname{up}(x)$. Обозначим функцию, определяемую формулой (3.24), $h_a(x)$. Выяснить вид носителя функции $h_a(x)$ можно, например, следующим образом. Как известно, функция $\frac{\sin t}{t}$ является характеристической функцией случайной величины, равномерно распределенной (р. р.) на отрезке $[-1, 1]$. Тогда функция

$$F_a(t) = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sin ta^{-j}}{ta^{j}} \qquad (3.25)$$

— характеристическая функция случайной величины

$$\xi(a) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{-j}\xi_j, \tag{3.26}$$

где $\{\xi_j\}$ — последовательность независимых р. р. на $[-1, 1]$ случайных величин. Функция $h_a(x)$ — плотность случайной величины $\xi(a)$. Теперь очевидно, что

$$\operatorname{supp} h_a(x) = [-b, b], \tag{3.27}$$

где $b = \sum_{j=1}^{\infty} a^{-j} = \frac{1}{a-1}$. Тогда

$$F_a(t) = \frac{\sin ta^{-1}}{ta^{-1}} F(ta^{-1}). \tag{3.28}$$

Пусть $F_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(a) t^k$. Из (3.25) следует, что $c_{2k+1}(a) = 0$, так что

$$F_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(a) t^{2k}. \tag{3.29}$$

Поскольку

$$\frac{\sin ta^{-1}}{ta^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}a^{-2k}}{(2k+1)!}, \tag{3.30}$$

то (см. (3.28))

$$c_{2k}(a) = \sum_{j=0}^{k} \frac{c_{2k-2j}(-1)^j a^{-2j}}{a^{2k-2j}(2j+1)!}, \tag{3.31}$$

откуда

$$c_{2k}(a)(1 - a^{-2k}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_{2k-2j}(a)(-1)^j}{(2j+1)!} a^{-2k}$$

и, наконец,

$$c_{2k}(a) = \frac{1}{a^{2k}-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{c_{2l}(a)(-1)^{k-l}}{(2k-2l+1)!}. \tag{3.32}$$

Нетрудно заметить, что $c_0(a) = 1$. Из (3.32) следует

$$|c_{2k}(a)| \leqslant \frac{1}{a^{2k}-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(2k-2l+1)!} \max_{l<k} |c_{2l}(a)|.$$

Поскольку

$$\sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(2k-2l+1)!} < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} = C_1 < \infty,$$

то начиная с некоторого k $c_{2k}(a) < \max\limits_{l<k} |c_{2l}(a)|$, откуда $|c_{2k}(a)| < C$ для всех k. Поэтому

$$|c_{2k}(a)| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{a^{2j}-1}\right) C_1^k C_2$$

и, следовательно, $|c_{2k}(a)| \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и из (3.32) следует

$$|c_{2k}(a)| \leqslant C_3 \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(a^{2j}-1)}, \tag{3.33}$$

так как

$$\nu_k = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{|c_{2l}(a)|}{(2k-2l+1)!} \to 0$$

при $k \to \infty$, и начиная с некоторого k $\nu_k < 1$. Из (3.33) нетрудно получить

$$|c_{2k}(a)| < c_4 a^{-\sum\limits_{j=1}^{k} 2j} = C_4 a^{-(k+1)k}. \tag{3.34}$$

Оценку (3.34) можно еще улучшить. Скорость убывания $c_{2k}(a)$ в дальнейшем понадобится, например, для оценки остаточного члена при разложении функции $\mathrm{up}(x)$ в ряд специального вида.

Уточним поведение ν_k при $k \to \infty$. Из (3.34) получаем

$$\nu_k < \sum_{l=0}^{k-1} \frac{C_4 a^{-l(l+1)}}{(2k-2l+1)!} = C_4 \sum_{j=1}^{k} \frac{a^{-(k-j+1)(k-j)}}{(2j+1)!} =$$

$$= C_4 \left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{a^{-(k-j+1)(k-j)}}{(2j+1)!} + \sum_{j=\left[\frac{k}{2}\right]+1} \frac{a^{-(k-j+1)(k-j)}}{(2j+1)!} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(a^{-\frac{k^2}{4}} \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{(2j+1)!} + \sum_{j=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k} \frac{1}{(2j+1)!} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(C_5 a^{-\frac{k^2}{4}} + C_6 \frac{1}{(k+1)!} \right) \leqslant C_7 \frac{1}{(k+1)!}.$$

Поскольку (см. (3.32)) $|c_{2k}(a)| \leqslant \frac{1}{a^{2k}-1} \nu_k$, то

$$|c_{2k}(a)| \leqslant \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{a^{2j}-1} \frac{C_7^k}{\prod\limits_{j=1}^{k} (j+1)!} \leqslant C_8 a^{-k(k+1)} \left(\prod_{j=1}^{k} j! \right)^{-1}. \tag{3.35}$$

Так как

$$c_{2k}(a) = \frac{F_a^{(2k)}(0)}{(2k)!}, \tag{3.36}$$

а

$$F_a^{(2k)}(0) = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} h_a(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3.37}$$

то

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} h_a(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant C_8 a^{-k(k+1)} (2k)! \left(\prod_{j=1}^{k} j! \right)^{-1} \leqslant C_9 a^{-k(k+1)}. \tag{3.38}$$

Рассмотрим $h_a(x)$ при $a > 2$. Из (3.23) и (3.27) следует $h_a'(x) \equiv \equiv 0$ на $[-b_1, b_1]$, где $b_1 = b - \frac{2b}{a} = b\left(1 - \frac{2}{a}\right) > 0$, и, значит, $h_a(x) \equiv \mathrm{const}$ на $[-b_1, b_1]$. Аналогично получим, что на двух интервалах общей длины $2 \times 2b_1 a^{-1}$ функция $h_a(x)$ — многочлен первой степени, на четырех интервалах общей длины $4 \times 2b_1 a^{-2}$ $h_a(x)$ — многочлен второй степени и т. д. Мера множества Pol_a тех $x \in \operatorname{supp} h_a(x)$, у которых есть окрестность, где $h_a(x)$ — многочлен, составляет:

$$\mu(Pol_a) = 2b_1 + 2b_1 \frac{2}{a} + 2b_1 \left(\frac{2}{a}\right)^2 + \cdots = 2b_1 \frac{1}{1 - \frac{2}{a}} = 2b, \tag{3.39}$$

т. е. $\mu(Pol_a) = \mu(\operatorname{supp} h_a(x))$.

Таким образом, $h_a(x)$ при $a > 2$ на множестве полной меры — многочлен, а на оставшемся множестве sing_a (нигде не плотном, типа известного канторова множества) меры 0 — неаналитическая функция (действительно, ряд Тейлора функции $h_a(x)$ в точках множества sing_a либо состоит из конечного числа членов и не сходится, следовательно, к $h_a(x)$, либо имеет нулевой радиус сходимости). Итак, в полученном примере функций класса $C^\infty(\mathbb{R})$ почти в каждой точке ряд Тейлора — многочлен, но функции тем не менее не являются многочленами и не аналитичны.

Поскольку кусочно-полиномиальные функции называются сплайнами, то функции $h_a(x)$ при $a > 2$ естественно причислить к сплайнам класса C^∞.

Вычислим значения $h_a(x)$ при $a > 2$. Пусть Sing_a^1 — множество тех точек из Sing_a, в которых ряд Тейлора — многочлен. Поскольку $h_a(x)$ — четная функция, рассмотрим только интервал $[-b, 0]$. Из (3.22) получаем

$$h(-b_1) = \int_{-b}^{b_1} h_a'(x)\,\mathrm{d}x = -\lambda \int_{-b}^{b_1} h_a(ax+1)\,\mathrm{d}x = = -\frac{\lambda}{a} \int_{-b}^{b} h_a(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\lambda}{a}.$$

Таким образом, на $[-b_1, b_1]$ $h_a(x) = -\frac{\lambda}{a}$, а так как (см. (3.20)) $\lambda = -\frac{a^2}{2}$, то

$$h_a(x) = \frac{a}{2}. \tag{3.40}$$

Поэтому

$$\int_{-b_1}^{b_1} h_a(x)\,\mathrm{dx} = ab_1 = \frac{a-2}{a-1} \tag{3.41}$$

и, следовательно,

$$\int_{-b}^{b_1} h_a(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{a-2}{a-1}. \tag{3.42}$$

Тогда

$$h_a\left(-b + \frac{b-b_1}{a}\right) = \int_{-b}^{-b+\frac{b-b_1}{a}} h_a'(x)\,\mathrm{dx} = -\lambda \int_{-b}^{-b+\frac{b-b_1}{a}} h_a(ax+1)\,\mathrm{dx} =$$

$$= -\frac{\lambda}{a}\int_{-b}^{b_1} h_a(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{a-2}{a-1}\right). \tag{3.43}$$

Далее,

$$h_a'\left(-b + \frac{b-b_1}{a}\right) = \int_{-b}^{-b+\frac{b-b_1}{a}} h_a''(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lambda^2 a \int_{-b}^{-b+(b-b_1)a^{-1}} h_a(a^2x + a + 1)\,\mathrm{dx} = \frac{\lambda^2}{a}\int_{-b}^{b} h_a(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a^3}{4}. \tag{3.44}$$

Поэтому на $\left[-b + \frac{b-b_1}{a},\ -b_1 - \frac{b-b_1}{a}\right]$

$$h_a(x) = \frac{a^3}{4}\left(x + b - \frac{b-b_1}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{a-2}{a-1}\right). \tag{3.45}$$

Продолжая таким же образом, можно вычислить коэффициенты всех многочленов, из которых «составлена» функция $h_a(x)$, причем эти коэффициенты будут рациональным образом выражаться через a.

Между моментами функции $h_a(x)$ $\int_{-b}^{b} x^{2n} h_a(x)\mathrm{dx}$ (а следовательно, и коэффициентами $c_{2k}(a)$) и значениями функции $h_a(x)$ в некоторых точках существует следующая связь. По формуле Тейлора

$$h_a(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h_a^{(k)}(-b)}{k!}(x+b)^k + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-b}^{x} h_a^{(n+1)}(\tau)(x-\tau)^n \, d\tau. \tag{3.46}$$

Но $h_a^{(k)}(-b) = 0$, $k \in N$. Поэтому

$$h_a(x) = R_n(x). \tag{3.47}$$

Из (3.46) и (3.23) видно, что значения $h_a(x)$ в точках $x \in \mathrm{Sing}_a^1$ есть линейные комбинации моментов функции $h_a(x)$.

Найдем выражения для $h_a^{(n)}(x)$ и опишем точки $x \in \mathrm{Sing}_a^1$. Из (3.23) следует

$$h_a''(x) = \lambda^2 a (h_a(ax + a + 1) - h_a(a^2x + a - 1)) -$$
$$- h_a(a^2x - a + 1) + h_a(a^2x - a - 1)). \tag{3.48}$$

В итоге, продолжая дифференцировать $h_a(x)$ с использованием (3.23), получаем

$$h_a^{(n)}(x) = |\lambda|^n a^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k h_a\left(a^n x + \sum_{j=1}^{n} a^{j-1}(-1)^{p_j(k-1)}\right), \tag{3.49}$$

где $p_j(k)$ — число, состоящее в j-м разряде двоичного разложения числа k (т. е. числа k, записанного в двоичной системе счисления). Числа δ_k определяются следующим рекуррентным соотношением: $\delta_{2k} = -\delta_k$, $\delta_{2k-1} = \delta_k$, $\delta_1 = 1$.

Теперь опишем точки множества Sing_a^1. Точка $x_0 \in \mathrm{Sing}_a^1$ в том и только в том случае, если существует натуральное n и набор знаков $+$ или $-$ такой, что

$$a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k) = \pm b,$$

т. е.

$$x_0 = \left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k)\right) a^{-n}. \tag{3.50}$$

Пусть $x_0 \in \mathrm{Sing}_a^1$. Величины $h_a^{(l)}(x_0)$ согласно (3.49) выражаются через значения $h_a(x)$ в точках вида

$$x_1 = a^l x_0 + \sum_{j=0}^{l-1} (\pm a^j).$$

Подставим вместо x_0 его значение из (3.50):

$$x_1 = a^{l-n}\left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k)\right) + \sum_{j=0}^{l-1} (\pm a^j) =$$
$$= a^{l-n}\left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k) + \sum_{k=n-l}^{n-1} (\pm a^k)\right).$$

Достаточно считать, что $0 < l < n$, поскольку при $n \leqslant l$ $h_a^{(l)}(x_0) = 0$. Покажем, что для тех наборов знаков в сумме $\Sigma_{\mathrm{I}} = \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k)$, для которых при $n - l \leqslant k < n - 1$ хотя бы один из знаков при той же степени a в сумме

$$\sum\nolimits_{\mathrm{II}} = \sum_{k=n-l}^{n-1} (\pm a^k)$$

не противоположен, выполняется неравенство $|x_1| \geqslant b$ и, следовательно, $h_a(x_1) = 0$. Действительно, пусть k_1, $k_1 \geqslant n - l$,— наибольшее из тех k, для которых у данных наборов знаков в Σ_{I} и Σ_{II} знаки при a^k одинаковы. Тогда

$$\left|\sum\nolimits_{\mathrm{I}} + \sum\nolimits_{\mathrm{II}}\right| > 2a^{k_1} - 2\sum_{k=n-l}^{k_1} a^k - \sum_{k=0}^{n-l-1} a^k = \frac{2(a^{k_1+1} - 2a^{k_1})}{a-1} +$$

$$+ \frac{a^{n-l}}{a-1} + \frac{1}{a-1} \geqslant \frac{a^{n-l}}{a-1} + b$$

(так как $a > 2$). Поэтому

$$\left|a^{l-n}\left(\pm b + \sum\nolimits_{\mathrm{I}} + \sum\nolimits_{\mathrm{II}}\right)\right| > \frac{1}{a-1} = b.$$

Для того (единственного) набора знаков в Σ_{II}, у которого знаки при $k \geqslant n - l$ противоположны знакам Σ_{I},

$$x_1 = a^{l-n}\left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-l-1} (\pm a)\right)$$

и в силу (3.50) $x_1 \in \mathrm{Sing}_a^1$. Следовательно, и производные функции $h_a(x)$ в точках Sing_a^1 рациональным образом выражаются через a и $c_{2k}(a)$ (т. е. в конце концов через a).

Пусть $1 \leqslant m \leqslant 2^n$, а $x_m^{(n)} \in \mathrm{Sing}_a^1$ имеет вид

$$x_m^{(n)} = \left(b - \sum_{k=0}^{n-1} a^k (-1)^{p_{k+1}(m-1)}\right) a^{-n}. \qquad (3.51)$$

Тогда согласно (3.47) и (3.49)

$$h_a(x_m^{(n)}) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-b}^{x_m^{(n)}} h_a^{(n)}(\tau)(x_m^{(n)} - \tau)^{n-1}\, d\tau =$$

$$= \frac{|\lambda|^n a^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!} \int_{-b}^{x_m^{(n)}} \sum_{k=1}^{m} \delta_k h_a\left(a^n\tau + \sum_{j=1}^{n} a^{j-1}(-1)^{p_j(k-1)}\right) \times$$

$$\times (x_m^{(n)} - \tau)^{n-1}\, d\tau = \frac{|\lambda|^n a^{\frac{(n-1)n}{2}}}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{m} \delta_k \int_{-b}^{x_m^{(n)}} h_a\left(a^n\tau +\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} a^{j-1}(-1)^{p_j(k-1)}\right)(x_m^{(n)} - \tau)^{n-1}\, d\tau. \qquad (3.52)$$

Сделаем в k-м интеграле в (3.52) замену

$$t = a^n\tau + \sum_{j=1}^{n} a^{j-1} (-1)^{p_j(k-1)}.$$

Получим

$$h_a(x_m^{(n)}) = \frac{|\lambda|^n a^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!} a^{-n} \sum_{k=1}^{m} \delta_k \int_{-b}^{b} h_a(t)\Bigg(x_m^{(n)} - \Bigg(t + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} a^j (-1)^{p_{j+1}(k-1)}\Bigg) a^{-n}\Bigg)^{n-1} \mathrm{dt}. \quad (3.53)$$

Отсюда $\left(|\lambda| = \dfrac{a^2}{2}\right)$

$$h_a(x_m^{(n)}) = \frac{a^{2n} a^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!\,2^n} a^{-n} a^{-n(n-1)} \sum_{k=1}^{m} \delta_k \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1}^{2l} \beta_{m,k,n}^{n-1-2l} \int_{-b}^{b} h_a(t)\, t^{2l} \mathrm{dt} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!\,2^n} a^{-\frac{n(n-3)}{2}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1}^{2l} (-1)^l (2l)!\, c_{2l}(a) \sum_{k=1}^{m} \delta_k \beta_{m,k,n}^{n-1-2l}, \quad (3.54)$$

где

$$\beta_{m,k,n} = b + \sum_{j=0}^{n-1} a^j \left((-1)^{p_{j+1}(k-1)} - (-1)^{p_{j+1}(m-1)}\right).$$

Например, для $m = 1$, т. е. $x_1^{(n)} = -b + 2ba^{-n}$,

$$h_a(x_1^{(n)}) = \frac{a^{-\frac{n(n-3)}{2}}}{(n-1)!\,2^n} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1}^{2l} (-1)^l (2l)!\, c_{2l}(a)\, b^{n-1-2l}. \quad (3.55)$$

Выведем формулу для $h_a^{(l)}(x_m^{(n)})$. Из (3.49) следует

$$h_a^{(l)}(x_m^{(n)}) = |\lambda|^l a^{\frac{l(l-1)}{2}} \delta_s h_a\left(a^l x_m^{(n)} + \sum_{j=0}^{l-1} a^j (-1)^{p_{j+1}(s-1)}\right), \quad (3.56)$$

где s определяется из формулы $p_l(s-1) = p_{j+n-l}(m-1)$: $s = [m2^{l-n}]$. Таким образом,

$$h_a^{(l)}(x_m^{(n)}) = |\lambda|^l a^{\frac{l(l-1)}{2}} \delta_s h_a\Bigg(a^{l-n}\Bigg(b - \sum_{k=0}^{n-1} a^k (-1)^{p_{k+1}(m-1)} + \\ + \sum_{j=0}^{l-1} a^j (-1)^{p_{j+1}(s-1)}\Bigg)\Bigg) = \frac{a^{\frac{l(l+3)}{2}}}{2^l} \delta_s h_a(x_r^{(n-l)}), \quad (3.57)$$

где $r = m - [m2^{l-n}]\, 2^{n-l} + 1$. Окончательно получаем

$$h_a^{(l)}(x_m^{(n)}) = \frac{a^{-\frac{(n-l)(n-l+3)}{2} + \frac{l(l+3)}{2}}}{2^n\,(n-l-1)!}\,\delta_s \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-l-1}{2}\right]} C_{n-l-1}^{2j}\,(-1)^j\,(2j)!\,c_{2j}(a) \sum_{k=1}^{r} \delta_k \beta_{r,k,n-l}^{n-l-1-2j}. \qquad (3.58)$$

Итак, на интервале $[x_m^{(n)}, x_m^{(n)} + 2b_1 a^{-n+1}]$ функция $h_a(x)$ — многочлен степени $n - 1$ вида

$$h_a(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{h_a^{(l)}(x_m^{(n)})}{l!}\,(x - x_m^{(n)})^l, \qquad (3.59)$$

где $h_a^{(l)}(x_m^{(n)})$ вычисляются по формуле (3.58).

§ 3. ФУНКЦИЯ up(x)

Рассмотрим $h_a(x)$ при $a = 2$. По определению $h_2(x) = \mathrm{up}(x)$. Функция $\mathrm{up}(x)$, введенная в работе [52], исследовалась в работах [53—57, 59, 60, 66]. Из (3.24) следует

$$\mathrm{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}}\, dt. \qquad (3.60)$$

Функция $\mathrm{up}(x)$ — решение уравнения

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1), \qquad (3.61)$$

причем

$$\mathrm{supp}\,\mathrm{up}(x) = [-1, 1]. \qquad (3.62)$$

Производная n-го порядка функции $\mathrm{up}(x)$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{up}^{(n)}(x) = 2^{C_{n+1}^2} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k\,\mathrm{up}(2^n x + 2^n + 1 - 2k). \qquad (3.63)$$

Легко заметить, что

$$\|\mathrm{up}^{(n)}(x)\|_{C[-1,1]} = \|\mathrm{up}^{(n)}(x)\|_{L_1[-1,1]} = 2^{C_{n+1}^2}. \qquad (3.64)$$

В точках вида $k2^{-n}$ (т. е. двоично-рациональных) ряд Тейлора функции $\mathrm{up}(x)$ — многочлен степени n. Нетрудно убедиться, что в остальных точках носителя $\mathrm{up}(x)$ — отрезка $[-1,1]$ — ряд Тейлора этой функции имеет нулевой радиус сходимости. Таким образом, в то время как функции $h_a(x)$ при $a > 2$ аналитичны на множестве полной меры, функция $\mathrm{up}(x)$ неаналитична ни в одной точке носителя. Повторяя рассуждения § 2, можно вычислить значения функции $\mathrm{up}(x)$ в двоично-рациональных точках, выразив их через моменты функции up (x). Приведем формулы для этих моментов:

$$2b_{2k} = a_{2k} = \int_{-1}^{1} x^{2k}\,\mathrm{up}\,(x)\,\mathrm{dx} = (-1)^k c_{2k}(2)\,(2k)!; \qquad (3.65)$$

$$b_{2k+1} = \int_{0}^{1} x^{2k+2}\,\mathrm{up}\,(x)\,\mathrm{dx} = -\int_{0}^{1} \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\,\mathrm{up}'\,(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\int_{0}^{1} x^{2k+2}\,\mathrm{up}\,(2x-1)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2k+2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{u+1}{2}\right)^{2k+2}\mathrm{up}\,(u)\,du =$$

$$= \frac{1}{2^{2k+2}\,(2k+2)}\sum_{j=0}^{k+1} C_{2k+2}^{2j} a_{2j}. \qquad (3.66)$$

Теперь по формуле Тейлора получаем

$$\mathrm{up}\,(-1+k2^{-n}) = \frac{1}{n!}\int_{-1}^{-1+k2^{-n}} \mathrm{up}^{(n+1)}\,(\tau)\,(-1+k2^{-n}-\tau)^n\,d\tau =$$

$$= \frac{2^{C_{n+2}^2}}{n!}\sum_{j=1}^{k}\delta_j\int_{-1}^{-1+k2^{-n}} \mathrm{up}\,(2^{n+1}\tau+2^{n+1}+1-2j)\,(-1+k2^{-n}-\tau)^n\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{2^{C_{n+2}^2-(n+1)}}{n!}\sum_{j=1}^{k}\delta_j\int_{-1}^{1}\mathrm{up}\,(t)\,(-1+k2^{-n}-(t-2^{n+1}-1+2j)\,\times$$

$$\times\,2^{-n-1})^n\,\mathrm{dt} = \frac{2^{C_{n+2}^2-n-1-n^2}}{n!}\sum_{j=1}^{k}\delta_j\int_{-1}^{1}\mathrm{up}\,(t)\left(k-j+\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)^n\mathrm{dt} =$$

$$= \frac{2^{-n^2-n-1+C_{n+2}^2}}{n!}\sum_{j=1}^{k}\delta_j\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2l}\left(k-j+\frac{1}{2}\right)^{n-2l} a_{2l}2^{-2l}. \qquad (3.67)$$

Для точек вида $-1+2^{-n}$ поступим следующим образом [59]:

$$\mathrm{up}\,(-1+2^{-n}) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{-1}^{-1+2^{-n}} \mathrm{up}^{(n)}\,(\tau)\,(-1+2^{-n}-\tau)^{n-1}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{2^{C_{n+1}^2}}{(n-1)!}\int_{-1}^{-1+2^{-n}}\mathrm{up}\,(2^n\tau+2^n+1-2)\,(-1+2^{-n}-\tau)^{n-1}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{2^{C_{n+1}^2-n}}{(n-1)!}\int_{0}^{1}\mathrm{up}\,(t)\,t^{n-1}\,\mathrm{dt}\cdot 2^{-n(n-1)} = \frac{b_{n-1}}{2^{C_n^2}\,(n-1)!}. \qquad (3.68)$$

По формуле (3.63) найдем

$$\mathrm{up}^{(l)}\,(-1+2^{-n}) = 2^{C_{l+1}^2}\,\mathrm{up}\,(-1+2^{l-n}) = \frac{2^{C_{l+1}^2-C_{n-l}^2}}{(n-l-1)!}\,b_{n-l-1}. \qquad (3.69)$$

Получим теперь формулу для вычисления функции $\mathrm{up}(x)$ при любом x. Достаточно рассмотреть случай $-1 \leqslant x \leqslant 0$, так как функция $\mathrm{up}(x)$ четная. Для функции $\varphi_n(x) = \mathrm{up}(x) + \mathrm{up}(x - 2^{-n})$ на интервале $[-1 + 2^{-n}, -1 + 2^{-n+1}]$ получаем $\varphi_n^{n+1}(x) \equiv 0$, так как $\delta_2 = -\delta_1$. Следовательно, на этом интервале

$$\varphi_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{\varphi_n^{(l)}(-1+2^{-n})}{l!}(x + 1 - 2^{-n})^l, \qquad (3.70)$$

причем $\varphi_n^{(l)}(-1 + 2^{-n}) = \mathrm{up}^{(l)}(-1 + 2^{-n})$, так как $\mathrm{up}^{(l)}(-1) = 0$. Таким образом, для $x \in [-1 + 2^{-n}, -1 + 2^{-n+1}]$

$$\mathrm{up}(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{\mathrm{up}^{(l)}(-1+2^{-n})}{l!}(x + 1 - 2^{-n}) - \mathrm{up}(x - 2^{-n}), \quad (3.71)$$

т. е. для того чтобы вычислить функцию $\mathrm{up}(x)$ на $[-1 + 2^{-n}, -1 + 2^{-n+1}]$, нужно знать ее значения на $[-1, -1 + 2^{-n}]$. Разбивая интервал $[-1, -1 + 2^{-n}]$ на интервалы $[-1, -1 + 2^{-n-1}]$ и $[-1 + 2^{-n-1}, -1 + 2^{-n}]$ и повторяя те же выкладки, можем свести вычисление функции $\mathrm{up}(x)$ на интервале $[-1 + 2^{-n-1}, -1 + 2^{-n+1}]$ к вычислению ее на $[-1, -1 + 2^{-n-1}]$. Тем самым получаем возможность записать некоторый ряд для вычисления значений функции $\mathrm{up}(x)$, причем ряд быстро сходится. Действительно, на $[-1, -1 + 2^{-n}]$

$$0 \leqslant \mathrm{up}(x) \leqslant \mathrm{up}(-1 + 2^{-n}),$$
$$\mathrm{up}(-1 + 2^{-n}) = \frac{b_{n-1}}{2^{C_n^2}(n-1)!}.$$

Следовательно, использовав оценку (3.38) для $c_{2k}(a)$, получим

$$\mathrm{up}(-1 + 2^{-n}) \leqslant \frac{a_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{2^{C_n^2}(n-1)!} < \frac{C_9}{2^{C_n^2 + 2\left[\frac{n-1}{2}\right]\left(2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)}}. \quad (3.72)$$

Выпишем этот ряд для $0 \leqslant x < 1$:

$$\mathrm{up}(x-1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{s_k+1} p_k \sum_{j=0}^{k} \frac{2^{C_{j+1}^2} b_{k-j-1}}{2^{C_{k-j}^2}(k-j-1)!\, j!}(x - 0, p_1 \ldots p_k)^j; \qquad (3.73)$$

$$b_{-1} = 1, \quad 0! = (-1)! = 1, \quad s_k = \sum_{j=1}^{k} p_j.$$

Здесь величины b_l, $l > 0$, вычисляются по формулам (3.65), (3.66), а $x = 0, p_1 \ldots p_k \ldots$ — запись числа x в двоичной системе счисления.

Таким образом, $x - 0, p_1 \dots p_k = x - [x2^k]\, 2^{-k}$. Остаточный член

$$R_n(x) = \mathrm{up}\,(x-1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{s_k+1} \sum_{j=0}^{k} \frac{2^{C_{j+1}^2} b_{k-j-1}\,(x-0, p, \dots p_k)^j}{2^{C_{k-j}^2}\,(k-j-1)!\,j!} \tag{3.74}$$

не превосходит $\mathrm{up}\,(-1+2^{-n})$, т. е.

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{C}{2^{C_n^2+2\left[\frac{n-1}{2}\right]\left(2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)}(n-1)!}\,. \tag{3.75}$$

§ 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ В ВИДЕ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ СДВИГОВ ФУНКЦИИ up(x)

Из формулы (3.63) следует, что для того чтобы линейная комбинация сдвигов функции up (x)

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \mathrm{up}\,(x - k2^{-n}) \tag{3.76}$$

была многочленом степени n, необходимо и достаточно выполнение системы равенств

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} c_{k+j}\delta_j = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.77}$$

т. е. коэффициенты c_k должны быть решением разностной однородной системы с постоянными коэффициентами (3.77). Поэтому должно выполняться условие

$$c_k = \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=0}^{p_i-1} c_{il} k^l (\omega_i^{(n)})^k, \tag{3.78}$$

где $\omega_i^{(n)}$ — корни уравнения (степени $2^{n+1}-1$)

$$Q_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \delta_k \lambda^{2^{n+1}-k} = 0, \tag{3.79}$$

а p_i — кратность корня $\omega_i^{(n)}$. Вычислим корни уравнения (3.79). Очевидно,

$$Q_0(\lambda) = \lambda - 1, \quad \omega_1^{(0)} = 1. \tag{3.80}$$

Кроме того, легко видеть, что многочлены $Q_n(\lambda)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$Q_n(\lambda) = Q_{n-1}(\lambda)(\lambda^{2^n} - 1). \tag{3.81}$$

Поэтому корни характеристического уравнения (3.79) равны:

$$\omega_j^{(n)} = \exp(2\pi i j 2^{-l}), \tag{3.82}$$

где $0 \leqslant j \leqslant 2^l$, $l = 0, 1, \ldots, n$. Окончательно получаем

$$c_k = \sum_{j=1}^{2^n} \left[\cos(2\pi jk2^{-n}) \sum_{l=0}^{v_2(j)} c_{jl}k^l + \sin(2\pi jk2^{-n}) \sum_{l=0}^{v_2(j)} d_{jl}k^l \right], \quad (3.83)$$

где $v_2(j)$ — 2-адический показатель числа j, т. е. наибольшее целое число $v_2(j)$ такое, что $2^{v_2(j)}$ делит j. В частности, если c_k — многочлен степени n от индекса k, то функция $\sum_k c_k \operatorname{up}(x - k2^{-n}) = P_n(x)$ — многочлен степени n. Действительно, корень 1 имеет кратность $n + 1$ ($j = 2^n$). В работе [53] приведены формулы для представления x^n в виде линейной комбинации сдвигов функции $\operatorname{up}(x)$.

Докажем следующую теорему о единственности представляющей функции (т. е. функции, линейные комбинации сдвигов которой могут представлять собой многочлен сколь угодно высоких степеней). Эта теорема является усилением теорем, приведенных в работах [53, 66].

Теорема. *Пусть* $\varphi(x)$ *— финитная функция с носителем* $[-1, 1]$ *класса* C^∞, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $$\int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx = 1;$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\| \varphi^{(n)} \|_{C[-1,1]}}{2^{C_{n+2}^2}} = 0;$$

3) *для каждого натурального* n *существуют коэффициенты* $c_j^{(n)}$ *такие, что*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^{(n)} \varphi(x - j2^{-n}) = x^n.$$

Тогда $\varphi(x) \equiv \operatorname{up}(x)$.

Доказательство. Из условия 1 теоремы следует

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^{(0)} \varphi(x - j) \equiv 1,$$

где коэффициенты $c_j^{(0)}$ обязательно равны 1. Отсюда $\varphi'(x) = 2\varphi_1(2x + 1) - 2\varphi_1(2x - 1)$, где $\varphi_1(x)$ — финитная функция с носителем $[-1, 1]$ класса C^∞, удовлетворяющая всем условиям теоремы. Аналогично находим

$$\varphi_1'(x) = 2\varphi_2(2x + 1) - 2\varphi_2(2x - 1),$$

где $\varphi_2(x)$ удовлетворяет тем же условиям, и т. д. Получаем последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющих условиям теоремы и таких, что

$$\varphi_n'(x) = 2\varphi_{n+1}(2x + 1) - 2\varphi_{n+1}(2x - 1). \quad (3.84)$$

Проинтегрируем (3.84):

$$\varphi_n(x) = 2\int_{-1}^{x} (\varphi_{n+1}(2t+1) - \varphi_{n+1}(2t-1))\,dt. \qquad (3.85)$$

Из определения функции up (x) имеем

$$\mathrm{up}(x) = 2\int_{-1}^{x} (\mathrm{up}(2t+1) - \mathrm{up}(2t-1))\,dt. \qquad (3.86)$$

Из условия 2 теоремы следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\varphi_{n+1}\|_C}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-C_{n+2}^2}\|\varphi^{(n+1)}(x)\|_C}{2^n} = 0. \qquad (3.87)$$

Кроме того, $\varphi_n(0) = 1$, $\varphi_n(x-1) + \varphi_n(x) = 1$ при $x \in [0, 1]$. То же верно и для функции up (x). Положим

$$\gamma_n(x) = \mathrm{up}(x) - \varphi_n(x). \qquad (3.88)$$

Согласно (3.87)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\gamma_{n+1}(x)\|_C}{2^n} = 0. \qquad (3.89)$$

Функция $\gamma_n(x)$ обращается в 0 в точках -1, 0, 1 и, кроме того, для $x \in [0, 1]$

$$\gamma_n(x) = -\gamma_n(x-1). \qquad (3.90)$$

Из (3.84) и (3.88) находим

$$\gamma_n(x) = 2\int_{-1}^{x} (\gamma_{n+1}(2t+1) - \gamma_{n+1}(2t-1))\,dt. \qquad (3.91)$$

При $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ из (3.91) следует

$$|\gamma_n(x)| \leqslant \|\gamma_{n+1}\|_C. \qquad (3.92)$$

Согласно (3.90) неравенство (3.92) выполняется и на $[-\frac{1}{2}, 0]$ и, следовательно, на $[-1, 1]$. Кроме того, в силу (3.90) на $[-1, 0]$

$$|\gamma_n(x)| \leqslant \|\gamma_{n+1}\|_C\,\sigma_1(2x+1), \qquad (3.93)$$

где $\sigma_1(x) = 1 - |x|$. Поэтому

$$\|\gamma_{n-1}(x)\|_C \leqslant \frac{1}{2}\|\gamma_{n+1}\|_C \qquad (3.94)$$

и

$$|\gamma_{n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{2}\|\gamma_{n+1}\|_C\,\sigma_2(2x+1), \qquad (3.95)$$

где

$$\sigma_n(x) = 2 \int_{-1}^{x} (\sigma_{n-1}(2t+1) - \sigma_{n-1}(2t-1))\, dt. \qquad (3.96)$$

Продолжая эти рассуждения, получаем

$$\|\gamma_0\|_C = \| \mathrm{up}(x) - \varphi(x) \|_C \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \|\gamma_{n+1}\|_C. \qquad (3.97)$$

Здесь использованы условия $0 \leqslant \sigma_n(x) \leqslant 1$; $\int_{-1}^{0} \sigma_n(x)\, dx = \frac{1}{2}$. Поэтому из условия 3 теоремы и (3.89) следует $\|\gamma_0\|_C = 0$, т. е. $\varphi(x) \equiv \mathrm{up}(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Ограничение на рост производных в условии 3 теоремы нельзя ослабить. Например, функция $\varphi(x) = \mathrm{up}(x) + \alpha\, \mathrm{up}'(x)$, $\alpha \neq 0$, удовлетворяет условиям 1 и 3 теоремы, но

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\varphi^{(n)}(x)\|_C}{2^{C_{n+2}^2}} = |\alpha|$$

и, конечно, теорема для нее не верна: $\mathrm{up}(x) \neq \mathrm{up}(x) + \alpha\, \mathrm{up}'(x)$. Функции $\sigma_n(x)$, используемые при доказательстве теоремы,— финитные сплайны — подробно изучались в работах [62, 63].

§ 5. ФУНКЦИИ $F\mathrm{up}_n(x)$

Рассмотрим преобразование Фурье функции

$$F(t) = F_2(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-j}}{t2^{-j}} = \frac{2\cos\frac{t}{4}\sin\frac{t}{4}}{\frac{t}{2}} \prod_{j=2}^{\infty} \frac{\sin t2^{-j}}{t2^{-j}} =$$

$$= \cos\frac{t}{4}\left(\frac{\sin\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}}\right) \prod_{j=3}^{\infty} \frac{\sin t2^{-j}}{t2^{-j}}. \qquad (3.98)$$

Положим

$$F^{[1]}(t) = \left(\frac{\sin\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}}\right)^2 \prod_{j=3}^{\infty} \frac{\sin t2^{-j}}{t2^{-j}};$$

$$F\mathrm{up}_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} F^{[1]}(t)\, dt. \qquad (3.99)$$

Тогда из (3.98) следует

$$\mathrm{up}(x) = \left(F\mathrm{up}_1\left(x - \frac{1}{4}\right) + F\mathrm{up}_1\left(x + \frac{1}{4}\right)\right)2^{-1}. \qquad (3.100)$$

Поскольку

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos t2^{-k}, \tag{3.101}$$

то

$$F^{[1]}(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin t2^{-j-1}}{t2^{-j-1}} \cos t2^{-j-2} \right), \tag{3.102}$$

т. е.

$$F^{[1]}(t) = \frac{\sin t2^{-2}}{t2^{-2}} \cos t2^{-3} F^{[1]}\left(\frac{t}{2}\right), \tag{3.103}$$

или

$$itF^{[1]}(t) = 4F^{[1]}\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{e^{it2^{-2}} - e^{-it2^{-2}}}{2}\right)\left(\frac{e^{it2^{-3}} + e^{-it2^{-3}}}{2}\right) =$$

$$= F^{[1]}\left(\frac{t}{2}\right)\left(e^{it\frac{3}{8}} + e^{it\frac{1}{8}} - e^{-it\frac{1}{8}} - e^{-it\frac{3}{8}}\right).$$

Это значит, что функция $F\,\mathrm{up}_1(x)$ также атомарная и удовлетворяет уравнению

$$y'(x) = 2\left(y\left(2x + \frac{3}{4}\right) + y\left(2x + \frac{1}{4}\right) - y\left(2x - \frac{1}{4}\right) - \right.$$

$$\left. - y\left(2x - \frac{3}{4}\right)\right). \tag{3.104}$$

Легко видеть, что

$$\mathrm{supp}\, F\,\mathrm{up}_1(x) = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]. \tag{3.105}$$

Положим

$$F^{[2]}(t) = \left(\frac{\sin t2^{-3}}{t2^{-3}}\right)^2 \prod_{j=4}^{\infty} \frac{\sin t2^{-j}}{t2^{-j}} \tag{3.106}$$

и

$$F\,\mathrm{up}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} F^{[2]}(t)\,\mathrm{dt}. \tag{3.107}$$

Поскольку

$$F^{[1]}(t) = F^{[2]}(t) \cos^3 \frac{t}{2^3}, \tag{3.108}$$

то

$$F\,\mathrm{up}_1(x) = \left(F\,\mathrm{up}_2\left(x - \frac{1}{8}\right) + 2F\,\mathrm{up}_2(x) + F\,\mathrm{up}_2\left(x + \frac{1}{8}\right)\right) 2^{-2}. \tag{3.109}$$

Функция $F^{[2]}(t)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F^{[2]}(t)=\frac{\sin t2^{-4}}{t2^{-4}}(\cos t2^{-4})^{3}F^{[2]}\left(\frac{t}{2}\right). \tag{3.110}$$

Поэтому

$$F\,\mathrm{up}_2'(x)=2\sum_{k=0}^{4}(C_2^k-C_2^{k-2})F\,\mathrm{up}_2\left(2x-\frac{k}{4}+\frac{1}{2}\right). \tag{3.111}$$

Вообще положим [60]

$$F^{[n]}(t)=\left(\frac{\sin t2^{-n-1}}{t2^{-n-1}}\right)^{n+1}\prod_{l=n+2}^{\infty}\frac{\sin t2^{-l}}{t2^{-l}} \tag{3.112}$$

и

$$F\,\mathrm{up}_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}F^{[n]}(t)\,\mathrm{dt}. \tag{3.113}$$

Тогда

$$F\,\mathrm{up}_n(x)=2^{-n-1}\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^kF\,\mathrm{up}_{n+1}(x-k2^{-n-1}+(n+1)2^{-n-2}); \tag{3.114}$$

$$F^{[n]}(t)=\frac{\sin t2^{-n-2}}{t2^{-n-2}}(\cos t2^{-n-2})^{n+1}F^{[n]}\left(\frac{t}{2}\right); \tag{3.115}$$

$$F\,\mathrm{up}_n'(x)=2\sum_{k=0}^{n+2}(C_{n+1}^k-C_{n+1}^{k-1})F\,\mathrm{up}_n(2x-k2^{-n-1}+(n+2)2^{-n-2}); \tag{3.116}$$

$$\mathrm{supp}\,F\,\mathrm{up}_n(x)=[-(n+2)2^{-n-1},\ (n+2)2^{-n-1}]. \tag{3.117}$$

Из (3.114) получаем

$$\mathrm{up}(x)=2^{-C_n^2}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{2}\ldots\sum_{k_n=0}^{n}C_1^{k_1}C_2^{k_2}\ldots$$
$$\ldots C_n^{k_n}F\,\mathrm{up}_n\left(x-\sum_{i=1}^{n}k_i2^i+\sum_{i=1}^{n}i2^{-i-1}\right). \tag{3.118}$$

Нетрудно заметить также, что поскольку

$$F^{[n]}(t)=\left(\frac{\sin t2^{-n-1}}{t2^{-n-1}}\right)^{n+1}F(t2^{-n-1}); \tag{3.119}$$

$$F^{[n]}(t)=\left(\frac{\sin t2^{-n-1}}{t2^{-n-1}}\right)^{n+1}F(t2^{-n}), \tag{3.120}$$

то

$$F\,\mathrm{up}_n(x)=B_n(2^{n+1}x)\ast\mathrm{up}(2^{n+1}x); \tag{3.121}$$

$$F\,\mathrm{up}_n(x)=B_{n-1}(2^{n+1}x)\ast\mathrm{up}(2^nx), \tag{3.122}$$

где B-сплайн Шенберга

$$B_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} e^{itx}\mathrm{dt}. \qquad (3.123)$$

Аналогично тому, как это делалось выше, получим формулу для разложения функции $F^{[n]}(t)$ в степенной ряд (а тем самым и для моментов функции $F\,\mathrm{up}_n(x)$):

$$F^{[n]}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k}(n)\,t^{2k};$$

$$d_{2k}(n) = \sum_{j=0}^{k} a_{2j}2^{-2k(n+1)+j}\sum_{k_1+\cdots+k_n=k-j}\frac{(-1)^{k_1+\cdots+k_n}}{(2k_1+1)!\ \ldots\ (2k_n+1)!}; \qquad (3.124)$$

$$\int\limits_{-(n+2)2^{-n-1}}^{(n+2)2^{-n-1}} x^{2k}F\,\mathrm{up}_n(x)\,\mathrm{dx} = (-1)^k d_{2k}(n)\,(2k)! \qquad (3.125)$$

Из (3.112) видно, что

$$F\,\mathrm{up}_n^{(n+1)}(x) = 2_n^{(n+1)n}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_{n+1}^k\,\mathrm{up}\,(2^{n+1}x - 2k + (n+1)). \qquad (3.126)$$

Поэтому на интервале $[-(n+2)\,2^{-n-1},\ 2^{-n} - (n+2)\,2^{-n-1}]$

$$F\,\mathrm{up}_n(x) = 2^{C_{n+1}^2}\,\mathrm{up}\,(x - 1 + (n+2)\,2^{-n-1}). \qquad (3.127)$$

Вычислить функцию $F\,\mathrm{up}_n(x)$ на интервале $[-(n+2)\,2^{-n-1} + j2^{-n},\ (j+1)\,2^{-n} - (n+2)\,2^{-n-1}]$ можно по формуле

$$F\,\mathrm{up}_n(x) = 2^{C_{n+1}^2}(-1)^j C_{n+1}^j\,\mathrm{up}\,(x - 1 - j2^{-n} + (n+2)\,2^{-n-1}) + \\ + \sum_{k=0}^{n} c_{k,j}^{(n)}(x - j2^{-n} + (n+2)\,2^{-n-1})^k, \qquad (3.128)$$

где коэффициенты полинома $c_{k,j}^{(n)}$ вычисляются следующим образом (из формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме):

$$c_{k,j}^{(n)} = \frac{F\,\mathrm{up}_n^{(k)}\,(j2^{-n} - (n+2)\,2^{-n-1})}{k!}; \qquad (3.129)$$

$$F\,\mathrm{up}_n^{(m)}\,(j2^{-n} - (n+2)\,2^{-n-1}) = \frac{2^{-(n+1)(m+1)}}{(n-m)!}\times \\ \times\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k C_{n+1}^k\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{up}\,(u)\,(u + (j-k)\,2 - 1)^{n-m}\mathrm{du} = \\ = \frac{2^{-(n+1)(m+1)}}{(n-m)!}\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k C_{n+1}^k\sum_{s=0}^{n-m}(2\,(j-k)-1)^s C_{n-m}^s a_{n-m-s}. \qquad (3.130)$$

Выясним, в каком случае линейная комбинация сдвигов функции $F\,\mathrm{up}_n(x)$ вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k F\,\mathrm{up}_n(x - k2^{-n}) \tag{3.131}$$

представляет собой многочлен степени n. Из (3.126) для этого необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{j=0}^{n+1} c_{k+j}(-1)^j C_{n+1}^j = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.132}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j C_{n+1}^j \lambda^j = 0, \tag{3.133}$$

где $\lambda = 1$ — корень кратности $n + 1$ и, следовательно,

$$c_k = \sum_{j=0}^{n} A_j k^j, \tag{3.134}$$

т. е. $\varphi(x)$ — многочлен степени n в том и только в том случае, когда c_k — многочлен степени n от индекса. Функция $F\,\mathrm{up}_n(x)$ есть линейная комбинация сдвигов функции $\mathrm{up}(x)$, а именно:

$$F\,\mathrm{up}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,\mathrm{up}(x - 1 + (n+2)\,2^{-n-1} + k2^{-n}), \tag{3.135}$$

где

$$c_0 = 2^{C_{n+1}^2}, \quad c_s = (-1)^s\, 2^{C_{n+1}^2} C_{n+1}^s - \sum_{j=\max\{0;s-2^{n+1}\}} c_j \delta_{s-j}.$$

В дальнейшем рассматриваются последовательности конечномерных пространств, порожденных сдвигами функции $\mathrm{up}(x)$. В этих пространствах важно наличие так называемого локального базиса, состоящего из сдвигов функций $F\,\mathrm{up}_n(x)$. Таким образом, функция $\mathrm{up}(x)$ является линейной комбинацией сдвигов финитной функции со сколь угодно малым диаметром носителя. Таковы и другие атомарные функции.

§ 6. БЕЗГРАНИЧНО ДРОБИМЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 1. Финитная функция $\varphi(x)$ называется безгранично дробимой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} c_k^{(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(x - d_k^{(\varepsilon)}). \tag{3.136}$$

Функция $\varphi_\varepsilon(x)$ при этом называется дробной компонентой (или для краткости просто компонентой) функции $\varphi(x)$.

Определение 2. Финитная функция $\varphi(x)$ называется сильно безгранично дробимой, если она безгранично дробима на безгранично дробимые компоненты.

Определение 3. Финитная функция $\varphi(x) \geqslant 0$ называется дискретно аппроксимируемой, если она безгранично дробима и коэффициенты $c_k^{(\varepsilon)}$ из (3.136) для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такими, что

$$c_k^{(\varepsilon)} > 0, \quad \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} c_k^{(\varepsilon)} = 1, \tag{3.137}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1; \quad \varphi_\varepsilon(x) \geqslant 0. \tag{3.138}$$

Замечание 1. Безграничную дробимость не следует смешивать с безграничной делимостью законов распределения случайных величин.

Замечание 2. Функция $\varphi(x)$ в определениях 1—3 не обязательно должна быть обычной функцией точки — она может быть обобщенной функцией, мерой — лишь бы были определены сдвиги, линейные комбинации, финитность (понятие носителя), неотрицательность.

Замечание 3. Финитная функция дискретно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она является «плотностью» (см. замечание 2) случайной величины, обладающей следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$

$$\xi = \xi_{\text{д}}^{(\varepsilon)} + \xi_\varepsilon,$$

где $\xi_{\text{д}}^{(\varepsilon)}$ — дискретная случайная величина, принимающая конечное число значений, а $|\xi_\varepsilon| < \varepsilon$.

Теорема 1. *Функция* $\mathrm{up}(x)$ *сильно безгранично дробима на атомарные сильно безгранично дробимые компоненты; она является также дискретно аппроксимируемой.*

Доказательство теоремы 1 содержится в § 5.

Легко видеть, что класс безгранично дробимых финитных функций шире класса атомарных функций — к безгранично дробимым относятся также B-сплайны Шенберга $B_n(x)$, а именно:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k B_k(2x - k2 + n + 1). \tag{3.139}$$

Теорема 2. *Каждая сильно дискретно аппроксимируемая функция имеет вид*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \hat{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3.140}$$

где

$$\hat{\varphi}(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{l_k} c_l^{(k)} e^{it\alpha_l^{(k)}} \right); \qquad \sum_{l=1}^{l_k} c_l^{(k)} = 1; \quad c_l^{(k)} > 0. \tag{3.141}$$

Если $\sum_{k=1}^{\infty} \max |\alpha_l^{(k)}| < \infty$, то $\varphi(x)$ — финитная функция. Однако ответ на вопрос, какие условия нужно наложить на $c_l^{(k)}$ и $\alpha_l^{(k)}$ для того, чтобы $\varphi(x)$ обладала той или иной гладкостью, по-видимому, непрост.

Рассмотрим следующие важные для дальнейшего частные случаи сильно дискретно аппроксимируемых функций

$$\hat{\varphi}(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos^{l_k} t2^{-k}, \quad l_k \geqslant l_{k-1}, \quad l_1 \geqslant 1. \tag{3.142}$$

Положим $L = \{l_k\}$, $\varphi(x) = \varphi_L(x)$.

1. $l_m = l_{m+1} = \cdots = l_{m+k} = \cdots$ для некоторого m. Тогда $\varphi_L(x) \in C^{l_m - 2}(\mathbb{R})$ и $\varphi^{(l_m - 1)}(x)$ — кусочно-постоянная функция, т. е. $\varphi_L(x)$ — обыкновенный полиномиальный сплайн степени $m - 1$.

2. $l_k \to \infty$. Тогда $\varphi_L(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Действительно,

$$\hat{\varphi}(t) = \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^{l_1} \prod_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}}\right)^{l_k - l_{k-1}} \tag{3.143}$$

и, следовательно, $\hat{\varphi}(t)$ убывает быстрее любой степени t^m на $\mathbb{R}$. Отсюда $\varphi(t) \in C^{\infty}$. Несложно показать, что

$$|\hat{\varphi}(t)| \leqslant C \exp\left(\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{l_k - l_{k-1}}{2^k}\right)|t|\right). \tag{3.144}$$

Поэтому при $\sigma = +\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{l_k - l_{k-1}}{2^k} \leqslant \infty$ $\varphi(x)$ — финитная функция с носителем $[-\sigma, \sigma]$ (по теореме Винера — Пэли). В частности,

$$\begin{aligned} \mathrm{up}(x) &= \varphi_L(x) \quad \text{для} \quad l_k = k; \\ B_n(x) &= \varphi_L(x) \quad \text{для} \quad l_k = n + 1; \\ F\,\mathrm{up}_n(x) &= \varphi_L(x) \quad \text{для} \quad l_k = n + 1 + k. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Пусть NDS — полугруппа неубывающих последовательностей натуральных чисел. Тогда, если $\alpha, \beta \in NDS$ соответствуют $\varphi_\alpha(x)$, $\varphi_\beta(x)$, то, очевидно, $\alpha + \beta$ соответствует $\varphi_\alpha * \varphi_\beta(x)$. Каждой φ_L соответствует последовательность $\Phi_{L,m}$ 2^{m+1} -мерных подпространств $C[-1, 1]$, состоящих из функций вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \varphi_L(x - k2^{-m}) \tag{3.146}$$

с условиями $\varphi^{(k)}(-1) = \varphi^{(k)}(1)$, $k \in N$.

Аппроксимационные свойства последовательностей пространств $\Phi_{L,m}$ рассмотрены в гл. 4. Однако для произвольного L функция

φ_L вычисляется более сложно, чем для рассмотренных частных случаев,— это может затруднить применение $\Phi_{L,m}$ для произвольного $L \in NDS$ в численных методах.

§ 7. ФУНКЦИИ $y_k(x)$

Вернемся к рассмотрению финитных решений уравнения (3.22)

$$y'(x) + \alpha y(x) = \lambda(y(ax-1) + c_m y(ax+1)), \tag{3.147}$$

где

$$c_m = -\exp(-2\alpha a^{-m-1}), \quad m \in \mathrm{N}. \tag{3.148}$$

Пусть $f_{m,\alpha}(x)$ — решение (3.147) с условием $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_m(x)\,\mathrm{dx} = 0$. Тогда

$$f_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\hat{f}(t)\,\mathrm{d}t,$$

где

$$\hat{f}_m(t) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_0\left(\dfrac{e^{-ita^{-j-1}}}{a} + c_m\dfrac{e^{ita^{-j-1}}}{a}\right)}{-ita^{-j}+\alpha} =$$

$$= \prod_{j=0}^{m-1}\frac{\alpha}{1+c_m}\left(e^{-ita^{-j-1}} + c_m e^{ita^{-j-1}}\right)\prod_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha\left(e^{-ita^{-j-m-1}} + c_m e^{ita^{-j-m-1}}\right)}{(1+c_m)\,(-ita^{-j}+\alpha)}, \tag{3.149}$$

так как

$$\lambda_0 = \frac{\alpha a}{1+c_m}. \tag{3.150}$$

Таким образом, при $m > 0$ функция $f_m(x)$ — линейная комбинация сдвигов атомарной функции с более узким носителем, удовлетворяющей уравнению

$$y'(x) + \alpha y(x) = \lambda(y(ax+a^m) + c_m y(ax-a^m)). \tag{3.151}$$

Поэтому достаточно рассмотреть решения уравнения

$$y'(x) + \alpha y(x) = \frac{\alpha a}{1+c}\,y(ax+1) - \frac{\alpha c a}{1+c}\,y(ax-1), \tag{3.152}$$

имеющие вид $y_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\hat{y}_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$, где

$$\hat{y}_\alpha(t) = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha}{1+c}\,\frac{\left(e^{-ita^{-j}} + ce^{ita^{-j}}\right)}{(-ita^{-j}+\alpha)}, \quad c = -\exp(-2\alpha). \tag{3.153}$$

Они были приведены в работе [61] для $a = 2$. Для $a = 2$ уравнение (3.152) имеет вид

$$y_k'(x) - ky_k(x) = \frac{ke^{-\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}} y_k(2x+1) - \frac{ke^{\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}} y_k(2x-1). \quad (3.154)$$

Положим, как обычно, $\int\limits_{-1}^{1} y_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Тогда

$$y_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \hat{y}_k(t)\,\mathrm{d}t, \quad (3.155)$$

где

$$\hat{y}_k(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2\operatorname{sh}\frac{k}{2}} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{k}{2} + \frac{it}{2^n}\right)}{\frac{k}{2} + \frac{it}{2^n}} \quad (3.156)$$

и $\operatorname{supp} y_k(x) = [-1, 1]$. Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j y_k(x-j). \quad (3.157)$$

Тогда из (3.154) следует

$$\varphi'(x) - k\varphi(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{ke^{-\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}} c_j - \frac{ke^{\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}} c_{j-1} \right) y_k(2x-j). \quad (3.158)$$

Поэтому $\varphi'(x) - k\varphi(x) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда

$$c_j - e^k c_{j-1} = 0, \quad (3.159)$$

т. е. $c_j = c_1 e^{kj}$. Итак,

$$\varphi(x) = \sum_j e^{kj} y_k(x-j) = c_2 e^{kx}. \quad (3.160)$$

Вычислим значения функции $y_k(x)$. Из (3.160) для $x \in [0, 1]$ получаем $y_k(x) + e^k y_k(x-1) = c_2 e^{kx}$, т. е.

$$y_k(x) = c_2 e^{kx} - e^k y_k(x-1). \quad (3.161)$$

Таким образом, достаточно знать $y_k(x)$ при $x \in [-1, 0]$ и константу c_2, чтобы вычислить $y_k(x)$ при $x \in [0, 1]$. Положив в (3.161) $x = 0$, получим

$$c_2 = y_k(0). \quad (3.162)$$

Кроме того, из (3.154) при $x \in [-1, 0]$ следует

$$y_k'(x) - ky_k(x) = \frac{ke^{-\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}} y_k(2x+1)$$

Отсюда

$$e^{kx}\int_{-1}^{x}(y_k'(t)-ky_k(t))\,e^{-kt}\,dt=e^{kx}\int_{-1}^{x}\frac{ke^{-\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}}\,y_k(2t+1)\,e^{-kt}\mathrm{dt}. \quad (3.163)$$

Но

$$\int_{-1}^{x}y_k'(t)\,e^{-kt}\,\mathrm{dt}=y_k(t)\,e^{-kt}\Big|_{-1}^{x}+\int_{-1}^{x}ky_k(t)\,e^{-kt}\,\mathrm{dt},$$

откуда

$$y_k(x)=e^{kx}\int_{-1}^{x}\frac{ke^{-\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}}\,y_k(2t+1)\,e^{-kt}\,\mathrm{dt}. \quad (3.164)$$

Положим $x=0$, тогда

$$y_k(0)=\frac{ke^{-\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}}\int_{-1}^{0}y_k(2t+1)\,e^{-kt}\,\mathrm{dt}=\frac{ke^{-\frac{k}{2}}}{2\operatorname{sh}\frac{k}{2}}\int_{-1}^{1}y_k(u)\,e^{-k\frac{(u-1)}{2}}\,\mathrm{du}=$$

$$=\frac{k}{2\operatorname{sh}\frac{k}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}y_k(u)\,e^{-\frac{ku}{2}}\,du=\frac{k}{2\operatorname{sh}\frac{k}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{k}{2\operatorname{sh}\frac{k}{2}}\,\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right)}{\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)},$$

следовательно,

$$c_2=y_k(0)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right)}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}\,\frac{k}{2\operatorname{sh}\frac{k}{2}}=\hat{y}_k\left(i\,\frac{k}{2}\right). \quad (3.165)$$

Пусть

$$L_m=\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{d}{\mathrm{dx}}-2^jk\right). \quad (3.166)$$

Тогда

$$L_my_k(x)=2^{C^2_{m+1}}\sum_{j=1}^{2^{m+1}}\delta_jc_j^{(m)}y_k(2^{m+1}x-2j+2^{m+1}+1), \quad (3.167)$$

где коэффициенты $c_j^{(m)}$ вычисляются следующим образом:

$$c_j^{(m)}=\left(\frac{ke^{-\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}}\right)^{m-n(j-1)}\left(\frac{ke^{\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}}\right)^{n(j-1)}; \quad (3.168)$$

здесь $n(j)$ — число единиц в записи числа j в двоичной системе счисления. В справедливости формулы (3.168) можно убедиться, применив метод индукции. Из (3.167) следует

$$y_k(x) = \sum_{l=0}^{m} \alpha_l e^{2^l kx} \int_{-1}^{x} e^{-2^l kt} 2^{C_{m+1}^2} \sum_{j=1}^{2^m+1} \delta_j c_j^{(m)} y_k(2^{m+1}t - 2j + 2^{m+1} + 1)\,\mathrm{dt}, \tag{3.169}$$

где

$$\alpha_l = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j\neq l\\ j=0,\dots,m}} (2^l - 2^j)} k^{-m+1}. \tag{3.170}$$

Отсюда

$$y_k(-1 + s2^{-m}) = \sum_{l=0}^{m} \alpha_l e^{2^l(-1+s2^{-m})k} 2^{C_{m+1}^2} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2^{m+1}} \delta_j c_j^{(m)} \int_{-1}^{-1+s2^{-m}} e^{-2^l kt} y_k(2^{m+1}t - 2j + 2^{m+1} + 1)\,\mathrm{dt} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \alpha_l e^{2^l k(-1+s2^{-m})} 2^{C_{m+1}^2} \sum_{j=1}^{2^{m+1}} \delta_j c_j^{(m)} \times$$

$$\times \sum_{r=1}^{s} \int_{-1+(r-1)2^{-m}}^{-1+r2^{-m}} e^{-2^l kt} y_k(2^{m+1}t - 2j + 2^{m+1} + 1)\,\mathrm{dt} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \alpha_l e^{2^l k(-1+s2^{-m})} 2^{C_{m+1}^2} \sum_{j=1}^{2^{m+1}} \delta_j c_j^{(m)} \sum_{r=1}^{s} 2^{-m} \int_{-1}^{1} e^{-2^l k((u-1+2r)2^{-m}-1)} \times$$

$$\times y_k(u - 2(j - r))\,\mathrm{du}. \tag{3.171}$$

Здесь $u = 2^{m+1}t + 1 - 2r + 2^{m+1}$ для r-го интеграла, $t = (u - 1 + 2r)2^{-m-1} - 1$. Поскольку $\operatorname{supp} y_k(x) = [-1, 1]$, получаем

$$y_k(-1 + s2^{-m}) = \sum_{l=0}^{m} \alpha_l e^{2^l k(-1+s2^{-m})} 2^{C_{m+1}^2} \times$$

$$\times \sum_{r=1}^{s} 2^{-m} \delta_r c_r^{(m)} \int_{-1}^{1} e^{-2^l k((u-1+2r)2^{-m-1}-1)} y_k(u)\,\mathrm{du} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \alpha_l e^{2^l k(-1+s2^{-m})} 2^{C_{m+1}^2 - m} \sum_{r=1}^{s} \delta_r c_r^{(m)} e^{-2^l k((2r-1)2^{-m-1}-1)} \times$$

$$\times \hat{y}_k(i2^{l-m-1}k). \tag{3.172}$$

При $s = 1$

$$y_k(-1 + 2^{-m}) = \sum_{l=0}^{m} \alpha_l e^{2^{l-m-1}k} \hat{y}_k(i2^{-l-m-1}k) 2^{C_{m-1}^2} \left(\frac{ke^{-\frac{k}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k}{2}}\right)^m \tag{3.173}$$

§ 8. ФУНКЦИИ $\Xi_n(x)$ и $g_{kh}(x)$

Функции $\Xi_n(x)$ — это непосредственное и естественное обобщение функции $\mathrm{up}(x)$. По определению $\Xi_n(x)$ — финитное с носителем $[-1, 1]$ решение уравнения

$$y^{(n)}(x) = a \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k y((n+1)x + n - 2k), \qquad (3.174)$$

где $a = (n+1)^{n+1} 2^{-n}$, нормированное условием $\int_{-1}^{1} \Xi_n(x)\,\mathrm{dx} = 1$.

Легко видеть, что

$$\Xi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin t(n+1)^{-k}}{t(n+1)^{-k}} \right)^n \mathrm{dt}; \qquad (3.175)$$

$$\Xi_1(x) = \mathrm{up}(x);$$

$$\Xi_n^{\cdot}(x) = \underbrace{h_{n+1}(x) \ast \cdots \ast h_{n+1}}_{n \text{ раз}}(x). \qquad (3.176)$$

Все результаты, полученные в настоящей работе для функции $\mathrm{up}(x)$, без труда переносятся и на функции $\Xi_n(x)$, $n > 1$, однако формулировки результатов и их доказательства становятся более громоздкими.

Рассмотрим функции $g_{k,h}(x)$ — решения уравнения

$$g''_{k,h}(x) + k^2 g_{k,h}(x) = a g_{k,h}(3x+2h) - b g_{k,h}(3x) + a g_{k,h}(3x-2h) \qquad (3.177)$$

с условиями $\int_{-h}^{h} g_{k,h}(x)\,\mathrm{dx} = 1$, $\mathrm{supp}\, g_{k,h} = [-h, h]$. Видим, что

$$\hat{g}_{k,h}(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{k^2}{1 - \cos\frac{2kh}{3}} \left[\cos(2th3^{-j}) - \cos\frac{2}{3}kh \right] (k^2 - t^2 g^{1-j})^{-1} \right\};$$

$$a = \frac{3}{2} \frac{k^2}{1 - \cos\frac{2kh}{3}}; \quad b = 2a \cos\frac{2kh}{3}. \qquad (3.178)$$

Для того чтобы выполнялось равенство

$$\sum_m c_m g_{k,h}\left(x - \frac{2mh}{3}\right) = A\cos kx + B\sin kx,$$

необходимо и достаточно, чтобы $ac_m - bc_{m+1} + ac_{m+2} = 0$, т. е. $c_m = C_1\lambda_1^m + C_1\lambda_2^m$, где λ_1, λ_2 — корни уравнения $\lambda^2 - 2\cos\frac{2kh}{3} \times \lambda + 1 = 0$. Отсюда

$$c_m = C_1 \cos\frac{2khm}{3} + C_2 \sin\frac{2khm}{3}.$$

Функции $\Xi_n(x)$, $g_{k,h}(x)$ были введены в работах [61, 64].

ГЛАВА 4

ПРИБЛИЖЕНИЕ АТОМАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

§ 1. НЕРАВЕНСТВА ТИПА МАРКОВА — БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ СДВИГОВ ФУНКЦИИ up(x)

1. Хорошо известны неравенство Маркова [27]

$$\max_{x\in[a,b]} |P_n'(x)| \leqslant \frac{n^2}{b-a} \max_{x\in[a,b]} |P_n(x)|, \tag{4.1}$$

где $P_n(x)$ — алгебраический многочлен степени n, и неравенство Бернштейна [40]

$$\max |T_n'(x)| \leqslant n \max |T_n(x)|, \tag{4.2}$$

где $T_n(x)$ — тригонометрический многочлен степени n. Эти неравенства играют важную роль в теории приближений многочленами. В дальнейшем используются их аналоги для линейных комбинаций сдвигов сжатий функции up (x).

Рассмотрим функции вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \operatorname{up}(x - k2^{-n}). \tag{4.3}$$

В работах [65, 66] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $b - a > 8^{-n}$, *то*

$$\|\varphi'(x)\|_{C[a,b]} \leqslant 4 \cdot 8^n \|\varphi(x)\|_{C[a,b]}, \tag{4.4}$$

где $\varphi(x)$ *— функции вида (4.3).*

Доказательство. 1. Пусть $n = 0$. Тогда $\max |\varphi'(x)|$ достигается в точках вида $k + \frac{1}{2}$ и равен $2|\varphi(k+1) - \varphi(k)|$. Следовательно,

$$\|\varphi'(x)\|_C \leqslant 2|\varphi(k+1) - \varphi(k)| \leqslant 4 \max |\varphi(x)|,$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть для $n \leqslant n_0$ неравенство (4.4) доказано, $\varphi(x)$ имеет вид (4.3) для $n = n_0 + 1$ и $|\varphi'(x_{\max})| = \max |\varphi'(x)|$. По формуле Ньютона — Лейбница

$$\varphi(x) - \varphi(x_{\max}) = \int_{x_{\max}}^{x} \varphi'(t)\,dt = \int_{x_{\max}}^{x} \left[\varphi'(x_{\max}) + \int_{x_{\max}}^{t} \varphi''(\xi)\,d\xi\right] dt\,. \tag{4.5}$$

Но

$$\varphi'(x) = \sum_k d_k \operatorname{up}\left(\frac{x - k2^{-n_0}}{\frac{1}{2}}\right),$$

поэтому согласно индукции $|\varphi''(x)| \leqslant 4 \cdot 8^{n_0} \cdot 2 \max|\varphi'(x)|$. Из (4.5) следует

$$|\varphi'(x_{\max})||x - x_{\max}| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_{\max})| +$$

$$+\left|\int_{x_{\max}}^{x}\int_{x_{\max}}^{t} \varphi''(\xi)\,d\xi\right| \leqslant 2\max|\varphi(x)| + 8^{n_0+1}\max|\varphi'(x)| \times$$

$$\times\left|\int_{x_{\max}}^{x}\int_{x_{\max}}^{t} d\xi dt\right| = 2\max|\varphi(x)| + 4\cdot 8^{n_0}(x - x_{\max})^2 \max|\varphi'(x)|,$$

откуда

$$h(x) = 4\cdot 8^{n_0}\max|\varphi'(x)|(x - x_{\max})^2 - \max|\varphi'(x)||x - x_{\max}| +$$
$$+ 2\max|\varphi(x)| \geqslant 0.$$

Но минимум $h(x)$ достигается, когда

$$2\cdot 4\cdot 8^{n_0}\max|\varphi'(x)||x - x_{\max}| = \max|\varphi'(x)|,$$

т. е. $x = x_{\max} \pm 8^{-n_0-1}$. В этом случае при хотя бы одном выборе знака $x \in [a, b]$. При этом должно выполняться неравенство

$$\max|\varphi'(x)|8^{-n_0-1}\cdot\frac{1}{2} - \max|\varphi'(x)|8^{-n_0-1} + 2\max|\varphi(x)| \geqslant 0,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}8^{-n_0-1}\max|\varphi'(x)| \leqslant 2\max|\varphi(x)|,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. При $n = 0$ неравенство (4.4) точное, так как

$$\max_{[0,1]}|\operatorname{up}(x) - \operatorname{up}(x-1)| = 1, \quad \text{а} \quad \max_{[0,1]}|\operatorname{up}'(x) - \operatorname{up}'(x-1)| = 4.$$

Для $n \geqslant 1$ неравенство (4.4) неточное. Для $n = 1$ можно без труда получить и точное неравенство.

Теорема 2. *Пусть*

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \operatorname{up}\left(x - \frac{k}{2}\right); \qquad 2a,\ 2b \in \mathbb{Z}, \quad a \neq b. \tag{4.6}$$

Тогда

$$\max_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)| \leqslant 22\frac{2}{13}\max_{x\in[a,b]}|\varphi(x)| \tag{4.7}$$

— неравенство точное (т. е. существует функция $\varphi(x)$ вида (4.6), для которой неравенство (4.7) обращается в равенство).

Доказательство. Пусть $\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)|=|\varphi'(x_{\max})|$. Тогда $x_{\max}=\frac{m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$, причем

$$\left|\varphi'\left(\frac{m-1}{2}\right)\right|\leqslant\left|\varphi'\left(\frac{m}{2}\right)\right|.$$

(Здесь принято для определенности, что $\frac{m-1}{2}\in[a,b]$, в противном случае можно принять $\frac{m+1}{2}$.) На $\left[\frac{m-1}{2},\frac{m}{2}\right]$ имеем

$$\varphi'(x)+\varphi'\left(\frac{m}{2}\right)\mathrm{up}\,(2x-m)+\alpha\,\mathrm{up}\,(2x-m+1),$$

где $|\alpha|\leqslant\varphi'\left(\frac{m}{2}\right)$. Тогда

$$\varphi(x)=\varphi\left(\frac{m}{2}\right)+\int\limits_{\frac{m}{2}}^{x}\varphi'(t)\,dt=\varphi\left(\frac{m}{2}\right)+\varphi'\left(\frac{m}{2}\right)\int\limits_{\frac{m}{2}}^{x}\mathrm{up}\,(2t-m)\,dt+$$

$$+\alpha\int\limits_{\frac{m}{2}}^{x}\mathrm{up}\,(2t-m+1)\,dt.$$

Поэтому

$$\left|\varphi\left(\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\right|\geqslant\left|\varphi'\left(\frac{m}{2}\right)\right|\int\limits_{\frac{m}{2}}^{\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}}(\mathrm{up}\,(2t-m)-\mathrm{up}\,(2t-m+$$

$$+1))\,dt-\left|\varphi\left(\frac{m}{2}\right)\right|=\left|\varphi'\left(\frac{m}{2}\right)\right|\left(\frac{1}{8}-\frac{5}{144}\right)-\left|\varphi\left(\frac{m}{2}\right)\right|,$$

откуда

$$2\max|\varphi(x)|\geqslant\left|\varphi\left(\frac{m-\frac{1}{2}}{2}\right)\right|+\left|\varphi\left(\frac{m}{2}\right)\right|\geqslant\frac{13}{144}\left|\varphi\left(\frac{m}{2}\right)\right|.$$

$$\max|\varphi'(x)|\leqslant\frac{288}{13}\max|\varphi(x)|=22\frac{2}{3}\max|\varphi(x)|.$$

(Из (4.4) получилось бы $\max|\varphi'(x)|<32\max|\varphi(x)|$.) Знак равенства в (4.7) достигается при

$$\varphi'(x)=\sum_k(-1)^k\,\mathrm{up}\,(2x-k);\quad [a,b]=\left[\frac{1}{2},1\right];$$

$$\varphi(x)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x}\varphi'(t)\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\varphi'(t)\,dt.$$

2. Для того чтобы улучшить неравенство (4.4), для периодического случая произведем следующие преобразования. Из (4.5) получаем

$$\varphi(x) = \varphi(x_{\max}) = \varphi'(x_{\max})(x - x_{\max}) + \varphi''(x_{\max})\frac{(x - x_{\max})^2}{2} +$$

$$+ \int\limits_{x_{\max}}^{x}\int\limits_{x_{\max}}^{t}\varphi'''(\eta)\,d\eta d\xi dt. \tag{4.8}$$

Пусть для $\varphi(x)$ вида (4.3) справедливы неравенства

$$\|\varphi'(x)\|_C \leqslant C_{n,1}\|\varphi(x)\|_C; \quad \|\varphi''(x)\|_C \leqslant c_{n,2}\|\varphi(x)\|_C.$$

Известно (см. замечание к теореме 1 и теорему 2), что $c_{1,1} = 22\frac{2}{3}$; $c_{1,2} = 8\cdot 22\frac{2}{3}$. Попытаемся получить соотношение для величин $c_{n,1}$, $c_{n,2}$. Очевидно, что

$$c_{n,2} \leqslant 2c_{n,1}c_{n-1,1}. \tag{4.9}$$

В (4.8) $\varphi''(x_{\max}) = 0$, так как в точке $x_{\max}$ $|\varphi'(x)|$ имеет максимум. Поэтому из (4.8) получаем

$$|\varphi(x) - \varphi(x_{\max})| \geqslant |\varphi'(x_{\max})||x - x_{\max}| -$$

$$-\left|\int\limits_{x_{\max}}^{x}\int\limits_{x_{\max}}^{t}\int\limits_{x_{\max}}^{\xi}|\varphi'''(\eta)|\,d\eta d\xi dt\right| \geqslant$$

$$\geqslant |\varphi'(x_{\max})||x - x_{\max}| - c_{n_0,2}\cdot 4|\varphi'(x_{\max})|\frac{|x - x_{\max}|^3}{6}.$$

Здесь использовано неравенство $|\varphi'''(x)| \leqslant 4\cdot c_{n,2}|\varphi'(x_{\max})|$.

Исследуем функцию $h(z) = z - az^3$ для $a > 0$, $z > 0$. Производная этой функции $h'(z) = 1 - 3az^2$. При $z = \frac{1}{\sqrt{3a}}$ функция $h(z)$ достигает максимума. Тогда

$$|\varphi'(x_{\max})| \leqslant \frac{2\max|\varphi(x)|}{\left[\frac{1}{\sqrt{2c_{n,2}}} - \frac{1}{3\sqrt{2c_{n,2}}}\right]} = 3\sqrt{2c_{n,2}}\|\varphi(x)\|_C.$$

Учитывая (4.9), получаем

$$|\varphi'(x_{\max})| \leqslant 6\sqrt{c_{n,1}c_{n-1,1}}\|\varphi(x)\|_C. \tag{4.10}$$

Следовательно, $c_{n+1,1} \leqslant 6\sqrt{c_{n,1}c_{n-1,1}}$. Нетрудно проверить, что константы в соотношениях (4.9) и (4.10) более точны, чем указанные в теореме 1. Например, при $n = 2$ из (4.10) следует $c_{2,1} \leqslant \sqrt{4\cdot 22\frac{2}{3}} < 60$, а из теоремы 1 — $c_{2,1} \leqslant 256$.

Приведем еще один точный результат.

Теорема 3. *Из всех периодических на* $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{Z}$, *функций* $\varphi(x)$ *вида (4.3) (периодичность означает, что* $\varphi^{(i)}(a) = \varphi^{(i)}(b)$ *для* $i \in N$) *и таких, что* $\|\varphi^{n+1}(x)\|_{C[a,b]} = 1$, *минимум* $\|\varphi(x)\|_{C[a,b]}$ *достигается при* $\varphi(x) = \varphi_n^*(x)$, *где*

$$\varphi_n^*(x) = \sum_k (-1)^k 2^{-C_n^2+2} F\,\mathrm{up}_n(x - k2^{-n}). \tag{4.11}$$

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x)$ имеет вид (4.3), $\|\varphi_1^{(n+1)}(x)\|_C = 1$ и $\|\varphi_1(x)\|_C < \|\varphi_n^*(x)\|_C$. Тогда функции $h_\pm(x) = \pm\varphi_n^*(x) + \varphi_1(x)$ имеют не менее $2^n(b-a)$ чередований знака на $[a, b]$ (поскольку $\varphi_n^*(x)$ принимает наибольшие и наименьшие значения в $(b-a)2^n$ точках, причем наибольшее значение по модулю равно наименьшему и точки минимума и максимума чередуются). Но из двух функций $h_\pm(x)$ хотя бы одна имеет меньше чередований знаков на $[a, b]$. Действительно,

$$h_\pm^{(n+1)}(x) = \sum_k d_k^\pm\,\mathrm{up}(2^n x - k),$$

причем хотя бы один из $d_k^\pm$ равен нулю. Это противоречит теореме Ролля.

Рассмотрим теперь вопрос о неравенствах типа Маркова — Бернштейна для периодического случая по норме $L_2[-1, 1]$. (Для тригонометрических функций такое неравенство по норме L_2 тривиально.) Линейные комбинации вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k\,\mathrm{up}(2^l x - k2^{l-n}) \tag{4.12}$$

являются периодическими на $[-1, 1]$, т. е. $\varphi^{(i)}(-1) = \varphi^{(i)}(1)$, $i \in \mathrm{N}$.

Всякая функция $\varphi(x)$ вида (4.12) может быть однозначно представлена как

$$\varphi(x) = \sum_k d_k F\,\mathrm{up}_n^{\cdot}(2^l x - 2^{l-n}k),$$

где $d_k = d_{k+2^{n+1}}$. Пусть $\|\varphi(x)\|_{L_2[-1,1]} = 1$. Требуется найти $\max\|\varphi'(x)\|_{L_2[-1,1]}$. В 2^{n+1}-мерном пространстве $\mathrm{UP}_{l,n}$ функций вида (4.12) имеется естественный ортогональный базис. Пусть

$$F\,\mathrm{up}_n(2^l x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\pi kx}.$$

Тогда

$$F\,\mathrm{up}_n^{\cdot}(2^l x - 2^{l-n}j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\pi kj2^{-n}} e^{i\pi kx}.$$

Положим

$$\varphi_s(x) = 2^{-n-1}\sum_{j=1}^{2^{n+1}} e^{-i\pi js2^{-n}} F\,\mathrm{up}_n(2^l x - 2^{l-n}j) =$$

$$= 2^{-n-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\sum_{j=1}^{2^{n+1}} e^{i\pi kj2^{-n} - i\pi js2^{-n}}\right) e^{i\pi kx}. \tag{4.13}$$

Но

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} e^{i\pi j(k-s)2^{-n}} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq s + \nu 2^{n+1}, \\ 2^{n+1} & \text{при} \quad k = s + \nu 2^{n+1}, \end{cases} \quad (\nu \in \mathbb{Z}).$$

Поэтому

$$\psi_s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{s+2^{n+1}k} e^{i\pi(s+2^{n+1}k)x}. \tag{4.14}$$

Очевидно, функции $\psi_s(x)$ ортогональны. Это и есть естественный базис в $\mathrm{UP}_{l,n}$. Пусть

$$\varphi = \sum_{s=1}^{2^{n+1}} \lambda_s \psi_s, \quad \|\varphi\|_{L_2} = 1.$$

Это значит, что

$$\sum_{l=1}^{2^{n+1}} \lambda_s^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2c^2_{s+2^{n+1}k} = 1. \tag{4.15}$$

Тогда

$$\|\varphi'\|^2_{L_2} = \left\| \sum_{s=1}^{2^{n+1}} \lambda_s \psi_s' \right\|_{L_2} = 2 \sum_{s=1}^{2^{n+1}} \lambda_s^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c^2_{s+2^{n+1}k} (s + 2^{n+1}k)^2. \tag{4.16}$$

Отсюда

$$\max_{\|\varphi\|_{L_2}=1} \|\varphi'\|_{L_2} = \left(\max_{s=1,\dots,2^{n+1}} \frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c^2_{s+2^{n+1}k} (s+2^{n+1}k)^2}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c^2_{s+2^{n+1}k}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.17}$$

Здесь

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} F\,\mathrm{up}_n(2^l x)\, e^{-i\pi k x} \mathrm{dx} = \frac{1}{2^{l+1}} F^{[n]}(\pi k 2^{-l}), \tag{4.18}$$

где

$$F^{[n]}(t) = \left(\frac{\sin t2^{-n-1}}{t2^{-n-1}} \right)^{n+1} \prod_{k=n+2}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}}. \tag{4.19}$$

§ 2. ПРИМЕР НАИЛУЧШЕГО ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Функции $\varphi_n^*(x)$ (4.11) являются аналогом известных многочленов Чебышева, наименее уклоняющихся от нуля. Они появляются при решении следующей задачи наилучшего приближения в равномерной метрике.

Пусть UP_n^* — 2^{n+1}-мерное пространство периодических на $[-1, 1]$ функций вида

$$\sum_k c_k F\,\mathrm{up}_n(x - k2^{-n}) \tag{4.20}$$

(оно введено в § 1), а пространство UP_n' — $(2^{n+1}-1)$-мерное пространство функций вида

$$\sum_k c_k F\,\mathrm{up}_{n-1}(x-k2^{-n}) \tag{4.21}$$

с периодическими коэффициентами ($c_{k+2^{n+1}} = c_k$). Нетрудно заметить, что $\mathrm{UP}_n' \subset \mathrm{UP}_n^*$.

Рассмотрим такую задачу. Пусть $\varphi \in \mathrm{UP}_n^*$. Требуется найти наилучшее приближение φ элементами UP_n', т. е. такое $\varphi_1 \in \mathrm{UP}_n'$, что

$$\|\varphi-\varphi_1\|_{C[-1,1]} = \min_{\psi\in \mathrm{UP}_n'} \|\varphi-\psi\|_{C[-1,1]}.$$

Функция $\varphi \in \mathrm{UP}_n^*$ однозначно представима в виде $\varphi = \alpha\varphi_n^* + \varphi_1$; φ_n^* описывается формулой (4.11), $\varphi_1 \in \mathrm{UP}_n'$. Это следует из $\varphi^* \notin \mathrm{UP}_n'$, что будет доказано ниже. Тогда φ_1 — искомое наилучшее приближение, а

$$\|\varphi-\varphi_1\|_C = |\alpha|\,\|\varphi_n^*\|_C = \min_{\psi\in \mathrm{UP}_n'} \|\varphi-\psi\|_C.$$

Действительно, если $\varphi_2 \in \mathrm{UP}_n'$, а

$$\|\varphi-\varphi_2\|_C < \|\varphi-\varphi_1\|_C, \tag{4.22}$$

то функция

$$\varphi_3 = \varphi_2-\varphi_1 = \varphi_2-\varphi+(\varphi-\varphi_1) = \alpha\varphi_n^* + (\varphi_2-\varphi)$$

имеет на $[-1, 1]$ не менее 2^{n+1} перемен знака.

Лемма. *Если $\varphi \in \mathrm{UP}_n$, то число перемен знака у φ меньше 2^{n+1}.*

Доказательство. Если $\varphi \in \mathrm{UP}_n'$ и имеет 2^{n+1} или более перемен знака, то $(n+1)$-я производная $\varphi^{(n+1)}$ имеет 2^{n+1} или более перемен знака. Пусть

$$\varphi(x) = \sum_k c_k F\,\mathrm{up}_{n-1}(x-k2^{-n}) = \sum_k d_k F\,\mathrm{up}_n(x-k2^{-n}).$$

Тогда вектор $D = [d_k]$ получается из вектора $c = [c_k]$ по формуле $D = AC$, где

$$A = \begin{bmatrix} C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & \ldots & C_{n-1}^{2^n} \\ C_{n-1}^{2^n} & C_{n-1}^0 & \ldots & C_{n-1}^{2^n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \ldots & C_{n-1}^0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \sum_k f_k\,\mathrm{up}(2^n x-k),$$

где вектор $F = [f_k]$ равен BD, причем

$$B = \begin{bmatrix} C_{n+1}^0 & -C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \ldots & C_{n+1}^{2^n} \\ -C_{n+1}^{2^n} & C_{n+1}^0 & -C_{n+1}^1 & \ldots & -C_{n+1}^{2^n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & -C_{n+1}^3 & \ldots & -C_{n+1}^0 \end{bmatrix}.$$

Если $\varphi^{(n+1)}(x)$ имеет 2^{n+1} или более перемен знака, то либо $(-1)^k f_k > 0$, либо $(-1)^k f_k < 0$. (4.23)

Пусть V — вектор на интервале $[-1, -1, \ldots]$. Из (4.23) следует $VF \neq 0$ $(VF \in \mathbb{R})$. Но $VF = VBAC$ и, как несложно проверить, $VBA = 0$. Приходим к противоречию.

Следствие 1. $\varphi_n^* \notin \mathrm{UP}_n'$, так как имеет 2^{n+1} перемен знака.

Следствие 2. Неравенство (4.22) невозможно, так как $\varphi_3 \in \mathrm{UP}_n'$.

§ 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ СДВИГОВ СЖАТИЙ ФУНКЦИИ up(x)

Рассмотрим результат, полученный в работах [54, 65, 66].

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in C^m[a, b]$. *Тогда* $\forall h > 0$ $\exists c_j^h$ *такие, что*

$$\left\| f(x) - \sum_j c_j^h \,\mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - j2^{-m}\right) \right\|_{C^l[a,b]} \leqslant c_m h^{m-l} \omega_m(f, h), \quad (4.24)$$

где $\omega_m(f, h)$ — *модуль непрерывности функции* $f^{(m)}(x)$, c_m *не зависит от* h *(но зависит от* m*).*

Доказательство. Пусть

$$T_a^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a). \quad (4.25)$$

Тогда

$$|f(x) - T_a^m f(x)| \leqslant \frac{|x-a|^m}{m!} \omega_m(f, |x-a|). \quad (4.26)$$

Лемма [66]. *Пусть* $x \leqslant z_0 \leqslant y$ *и*

$$T_x^m f(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k (z - z_0)^k, \quad T_y^m f(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k (z - z_0)^k.$$

Тогда $|a_k - b_k| \leqslant C\omega_m(f, |x-y|)\,|x-y|^{m-k}$.

Ранее было показано, что

$$x^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(n)} \,\mathrm{up}(x - k2^{-n}). \quad (4.27)$$

Поэтому

$$x^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^n c_k^{(n)} \,\mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-n}\right). \quad (4.28)$$

Представим $T^m_{lh}f(x)$, где l — целое, в виде

$$T^m_{lh}f(x) = \sum_k \alpha_k^{(l)} \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right)$$

(здесь использовано выражение (4.28)). Тогда из леммы и (4.28) следует

$$|\alpha_k^{(l+1)} - \alpha_k^{(l)}| \leqslant Ch^m \omega_m(f, h).$$

Положим

$$\tilde{T}_{lh}f(x) = \sum_k \alpha_k^{(l)} \operatorname{up}(l - k2^{-m}) \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right),$$

$$T^h f(x) = \sum \tilde{T}^m_{lh}f(x) = \sum_j c_j^h \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - 2^{-m}j\right).$$

Покажем, что

$$|(f(x) - T^h f(x))^{(i)}| \leqslant Ch^{m-i}\omega_m(f, h), \qquad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Если $x \in [lh, (l+1)h]$, то

$$f(x) - T^h f(x) = f(x) - \tilde{T}^m_{(l-1)h}f(x) - \tilde{T}^m_{lh}f(x) -$$

$$- \tilde{T}^m_{(l+1)h}f(x) - \tilde{T}^m_{(l+2)h}f(x),$$

так как $\operatorname{supp} \tilde{T}^m_{kh}f(x) = [(k-2)h, (k+2)h]$. Пусть

$$I_1 = \{k : k2^{-m}h \in [(l-1)h, lh)\};$$

$$I_2 = \{k : k2^{-m}h \in [(l-1)h, (l+1)h]\};$$

$$I_3 = \{k : k2^{-m}h \in [lh, (l+2)h]\};$$

$$I_4 = \{k : k2^{-m}h \in ((l+1)h, (l+2)h]\};$$

$$I = I_2 \cup I_3.$$

Тогда

$$|f(x) - T^h f(x)| = \Bigg| f(x) - \sum_{k\in I} \alpha_k^{(l)} \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) +$$

$$+ \sum_{k\in I} \alpha_k^{(l)} \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) - \sum_{k\in I_1} \alpha_k^{(l-1)} \operatorname{up}(l - 1 - k2^{-m}) \times$$

$$\times \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) - \sum_{k\in I_2} \alpha_k^{(l)} \operatorname{up}(l - k2^{-m}) \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) -$$

$$- \sum_{k\in I_3} \alpha_k^{(l+1)} \operatorname{up}(l + 1 - k2^{-m}) \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) -$$

$$- \sum_{k\in I_4} \alpha_k^{(l+2)} \operatorname{up}(l + 2 - k2^{-m}) \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) \Bigg|. \qquad (4.29)$$

При $lh \leqslant x \leqslant (l+1)h$ из того, что $\mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) = 0$ на $[lh, (l+1)h]$ при $k \notin I$, следует равенство

$$\sum_{k \in I} \alpha_k^{(l)} \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) = T_{lh}^m f(x).$$

Поэтому

$$\left|\left(f(x) - \sum_{k \in I} \alpha_k^{(l)} \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right)\right)^{(i)}\right| \leqslant Ch^{m-i}\omega_m(f, h).$$

Теперь покажем, что остальные слагаемые в правой части (4.29) малы. Их можно сгруппировать так:

$$\left[\sum_{k \in I_1} \alpha_k^{(l)} \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) - \sum_{k \in I_1} \alpha_k^{(l-1)} \mathrm{up}(l - 1 - k2^{-m}) \times\right.$$

$$\left.\times \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) - \sum_{k \in I_1} \alpha_k^{(l)} \mathrm{up}(l - k2^{-m}) \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right)\right] +$$

$$+ \left[\sum_{k \in I_2 \cap I_3} \alpha_k^{(l)} \mathrm{up}\left(\frac{x - k2^{-m}h}{h}\right) - \sum_{k \in I_2 \cap I_3} \alpha_k^{(l)} \mathrm{up}(l - k2^{-m}) \times\right.$$

$$\left.\times \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) - \sum_{k \in I_2 \cap I_3} \alpha_k^{(l+1)} \mathrm{up}(l + 1 - k2^{-m}) \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right)\right] +$$

$$+ \left[\sum_{k \in I_4} \alpha_k^{(l)} \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) - \sum_{k \in I_4} \alpha_k^{(l+1)} \mathrm{up}(l + 1 - k2^{-m}) \times\right.$$

$$\left.\times \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) - \sum_{k \in I_4} \alpha_1^{(l+2)} \mathrm{up}(l + 2 - k2^{-m}) \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right)\right]. \tag{4.30}$$

Оценим выражение в третьих квадратных скобках:

$$\sum_{k \in I_4} \alpha_k^{l} \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) - \sum_{k \in I_4} \alpha_k^{(l+1)} \mathrm{up}(l + 1 - k2^{-m}) \times$$

$$\times \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) - \sum_{k \in I_4} \alpha_k^{(l+2)} \mathrm{up}(l + 2 - k2^{-m}) \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) =$$

$$= \sum_{k \in I_4} \alpha_h^{(l)} \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) - \sum_{k \in I_4} \alpha_k^{(l+1)} \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) +$$

$$+ \sum_{k \in I_4} (\alpha_k^{(l+1)} - \alpha_k^{(l+2)}) \mathrm{up}(l + 2 - k2^{-m}) \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) \tag{4.31}$$

(так как $\mathrm{up}(l + 1 - k2^{-m}) + \mathrm{up}(l + 2 - k2^{-m}) = 1$ при $k \in I_4$). Поскольку

$$|\alpha_k^{(l)} - \alpha_k^{(l+1)}| \leqslant Ch^m\omega_m(f, h),$$
$$|\alpha_k^{(l+1)} - \alpha_k^{(l+2)}| \leqslant Ch^m\omega_m(f, h),$$

то правая часть выражения (4.31) не превосходит по модулю $Ch^m \omega_m (f, h)$. Оценим выражение в первой квадратной скобке формулы (4.30):

$$\sum_{k \in I_1} \alpha_k^{(l)} \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right) = \sum_{k \in I_1} \alpha_k^{(l)} (\operatorname{up}(l-1-k2^{-m}) +$$

$$+ \operatorname{up}(l - k2^{-m})) \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right).$$

Отсюда

$$\sum_{k \in I_1} (\alpha_k^{(l)} - \alpha_k^{(l-1)}) \operatorname{up}(l-1-k2^{-m}) \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right);$$

это выражение также не превосходит по модулю $Ch^m \omega_m (f, h)$. Аналогично для выражения во второй квадратной скобке формулы (4.30) получаем

$$\sum_{k \in I_2 \cap I_3} (\alpha_k^{(l)} - \alpha_k^{(l-1)}) \operatorname{up}(l+1-k2^{-m}) \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right),$$

что по модулю менее $Ch^m \omega_m (f, h)$. Таким образом, при $lh \leqslant x \leqslant (l+1) h$

$$|f(x) - T^h f(x)| = |f(x) - T_{lh}^m f(x) - \gamma_l(x)|,$$

где $\gamma_l(x) = \sum_k \beta_k^{(l)} \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-m}\right)$ и $|\gamma_l(x)| \leqslant Ch^m \omega_m (f, h)$.

Из доказанных в § 1 неравенств типа Маркова — Бернштейна следует

$$|\gamma_l^{(i)}(x)| \leqslant Ch^{m-i} \omega_m (f, h). \tag{4.32}$$

Теорема доказана. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, можно доказать следующую, более сильную, теорему.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in C^m [a, b]$. *Тогда* $\forall h > 0$ $\exists c_j^h$ *такие, что*

$$\left| \left(f(x) - \sum_j c_j^h \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - j2^{-m}\right)\right)^{(i)} \right| \leqslant Ch^{m-i} \omega_m (x, 2h, h),$$

где

$$\omega_m (x, a, b) = \max_{\substack{|x_1 - x_2| \leqslant b, \\ |x - x_1| \leqslant a, \\ |x - x_2| \leqslant a}} |f^{(m)}(x_1) - f^{(m)}(x_2)|.$$

Оценить величину константы C в теореме 1 из данного доказательства затруднительно. Приведем результат, в котором величина константы получается очень легко, но, естественно, она завышена.

Теорема 3 [60]. *Пусть* $f(x) \in C^m [a, b]$. *Тогда* $\forall h > 0$ $\exists c_j^h$ *такие, что*

$$\left\| f(x) - \sum_j c_j^h \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - j2^{-m}\right) \right\|_{C[a,b]} \leqslant 2^{-C_m^2} h^m \omega\left(f^{(m)}, \frac{h}{2^{m+1}}\right).$$

Доказательство (индукцией по m). 1. $m=0$. Положим $c_j^h = f(jh)$. Тогда для $x \in \left[jh,\ \left(j+\frac{1}{h}\right)h\right]$

$$\left| f(x) - \sum_j c_j^h \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - j\right) \right| = | f(x) - f(jh) + (f((j+1)h) - f(jh)) \times$$

$$\times \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - j - 1\right)| \leqslant | f(x) - f(jh) | \cdot \frac{1}{2}\ | f((j+1)h) -$$

$$- f(jh) | \leqslant 2\omega_f\left(\frac{h}{2}\right),$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть для $m \leqslant m_0$ теорема доказана. Если $f(x) \in C^{m_0+1}[a,\ b]$, то $f'(x) \in C^{m_0}[a,\ b]$ и, следовательно, существуют $d_j^{h2^{-1}}$ такие, что

$$\left\| f'(x) - \sum_j d_j^{h2^{-1}} \operatorname{up}\left(\frac{1}{h2^{-1}} - j2^{-m_0}\right) \right\|_{C[a,b]} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-C_{m_0}^2}\left(\frac{h}{2}\right)^{m_0} \omega\left(f^{(m_0+1)},\ \frac{h}{2^{m_0+2}}\right).$$

Пусть

$$\varphi(x) = f(x) - \int_a^x \sum_j d_j^{h2^{-1}} \operatorname{up}\left(\frac{2t}{h} - j2^{-m_0}\right) \mathrm{dt}.$$

Тогда

$$\| \varphi'(x) \|_{C[a,b]} \leqslant 2^{-(C_{m_0}^2 + m_0)} h^{m_0} \omega\left(f^{(m_0+1)},\ h2^{-m_0-2}\right)$$

и, следовательно,

$$\omega\left(\varphi(x),\ h2^{-1}\right) \leqslant \frac{h}{2}\, 2^{-(C_{m_0}^2 + m_0)} h^{m_0} \omega\left(f^{(m_0+1)},\ h2^{-m_0-2}\right).$$

Поэтому

$$\left| \varphi(x) - \sum_j \varphi(jh) \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - j\right) \right| \leqslant h2^{-(C_{m_0}^2 + m_0)} h^{m_0+1} \omega\left(f^{(m_0+1)},\ h2^{-m_0-2}\right) =$$

$$= 2^{-C_{m_0+1}^2} h^{m_0+1} \omega\left(f^{(m_0+1)},\ h2^{-m_0-2}\right).$$

Но функция $\varphi(x) - \sum_j \varphi(jh) \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - j\right)$ имеет вид $f(x) -$ $- \sum_j c_j^h \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - j2^{-m_0-1}\right)$, так что существуют c_j^h такие, что

$$\left\| f(x) - \sum_j c_j^h \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - j2^{-m_0-1}\right) \right\|_{C[a,b]} \leqslant h^{m_0+1} 2^{-C_{m_0+1}^2} \times$$

$$\times\, \omega\left(f^{(m_0+1)},\ h2^{-m_0-2}\right).$$

Размерность N пространства $\mathrm{UP}_m^h(a, b)$ линейных комбинаций вида $c_j^h \sum_j \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - j2^{-m}\right)$ приблизительно равна $\frac{(b-a)^l}{h} 2^n$. Таким образом, $h \approx \frac{(b-a)\,2^n}{N}$ и

$$\inf_{\varphi \in \mathrm{UP}_m^h(a,b)} \|f(x) - \varphi(x)\|_{C[a,b]} \leqslant (1 + \alpha_N)(b-a)^m N^{-m} 2^{C_m^2} \omega\left(f^{(m)}, \frac{b-a}{N}\right),$$

где $\alpha_N \to 0$. Константа $2^{C_m^2}$, конечно, слишком велика и обусловлена методом доказательства.

Для того, чтобы уменьшить константу в теореме 3, изучим приближение функций из класса $\mathrm{Lip}_C 1$ линейными комбинациями вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \mathrm{up}\left(\frac{x}{h} - k2^{-n}\right). \tag{4.33}$$

Напомним, что $\mathrm{Lip}_C\, 1$ — класс функций $f(x)$ таких, что $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|$. Каждая функция $\varphi(x)$ вида (4.33) однозначно представима в виде

$$\varphi(x) = \sum_k d_k F \mathrm{up}_n\left(\frac{x}{h} - k2^{-n}\right). \tag{4.34}$$

Положим

$$\varphi_f(x) = \sum_k \alpha_n f(k2^{-n}h) F \mathrm{up}_n\left(\frac{x}{h} - k2^{-n}\right), \tag{4.35}$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{\sum_j F \mathrm{up}_n (j2^{-n})}. \tag{4.36}$$

Замечание. Покажем, что

$$h(x) = F \mathrm{up}_n (x + j2^{-n}) = \mathrm{const} = 2^n.$$

Действительно, $h(x)$ имеет период 2^{-n} и $h^{(n+1)}(x) \equiv 0$, следовательно, $h(x) = \mathrm{const} = C_1$,

$$\int_0^N h(x)\,\mathrm{dx} = C_1 N = \sum_j \int_0^N F \mathrm{up}_n (x + j2^{-n})\,\mathrm{dx} = 2^n N + A,$$

где A не зависит от N, и поэтому

$$C_1 = 2^n, \tag{4.37}$$

Оценим $\| f(x) - \varphi_f(x) \|_{C[a,b]}$. Пусть $x \in [k2^{-n}h, \; (k+1)2^{-n}h]$. Ввиду сделанного замечания

$$f(x) = f(x)\, 2^{-n} \sum_k F\,\mathrm{up}_n\left(\frac{x}{h} - k2^{-n}\right).$$

Поэтому

$$|f(x) - \varphi_f(x)| = \left| 2^{-n} \sum_k (f(x) - f(k2^{-n}h))\, F\,\mathrm{up}_n\left(\frac{x}{h} - k2^{-n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n} C \sum_k |x - k2^{-n}h|\, F\,\mathrm{up}_n\left(\frac{x}{h} - k2^{-n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n} Ch \sum_k \left(|k| + \frac{1}{2}\right) 2^{-n} F\,\mathrm{up}_n\,(k2^{-n} - 2^{-n-1}\,\mathrm{sign}\, k) =$$

$$= 2^{-2n} Ch \left(F\,\mathrm{up}_n(0) + 2 \sum_{k>0} \left(k + \frac{1}{2}\right) F\,\mathrm{up}_n\left(\left(k - \frac{1}{2}\right) 2^{-n}\right)\right). \quad (4.38)$$

Оценим

$$\beta_n = F\,\mathrm{up}_n(0) + 2 \sum_{k>0} \left(k + \frac{1}{2}\right) F\,\mathrm{up}_n\left(\left(k - \frac{1}{2}\right) 2^{-n}\right). \quad (4.39)$$

Грубую оценку β_n произведем следующим образом:

$$F\,\mathrm{up}_n(0) + 2 \sum_{k>0} \left(k + \frac{1}{2}\right) F\,\mathrm{up}_n\left(\left(k - \frac{1}{2}\right) 2^{-n}\right) <$$

$$< 2\left(\frac{n}{2} + 1\right) \sum_k F\,\mathrm{up}_n\left(\left(k - \frac{1}{2}\right) 2^{-n}\right) \leqslant (n+2)\, 2^n,$$

так как $F\,\mathrm{up}_n\left(2^{-n}\left(k - \frac{1}{2}\right)\right) = 0$ при $k > \frac{n+1}{2}$. Поэтому

$$\beta_n \leqslant (n+2)\, 2^n \quad (4.40)$$

и

$$|f(x) - \varphi_f(x)| \leqslant Ch2^{-n}(n+2). \quad (4.41)$$

Пусть теперь $f(x) \in C^n[a, b]$, $n \geqslant 1$. Оценим $\inf \| f - \varphi \|_C$, где φ имеет вид (4.33). Ранее показано, что существует функция φ вида (4.33), для которой

$$\| f^{(n)}(x) - \varphi_1^{(n)}(x) \|_{C[a,b]} \leqslant 2^{-n}h \cdot 2\omega(h2^{-n-1}).$$

Поскольку $f^{(n-1)}(x) - \varphi_1^{(n-1)}(x) \in \mathrm{Lip}_C 1$ при $C = 2^{-n}h \cdot 2\omega(h2^{-n-1})$, существует функция φ_2 вида (4.33) такая, что

$$\| f^{(n-1)}(x) - \varphi_1^{(n-1)}(x) - \varphi_2^{(n-1)}(x) \|_{C[a,b]} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n}h\omega(h2^{-n-1})\, h2^{-n+1} \cdot 2^{-1} \cdot 3 \cdot 2 = 2^{-2n}h^2 3!\, \omega(h2^{-n-1}).$$

Так как

$$f^{(n-2)}(x) - \varphi_1^{(n-2)}(x) - \varphi_2^{(n-2)}(x) \in \mathrm{Lip}_C 1$$

при $C = 2^{-2n}h^2 3!\omega(h2^{-n-1})$, то найдется функция φ_3 вида (4.33), для которой

$$\|f^{(n+2)}(x) - \varphi_1^{(n-2)}(x) - \varphi_2^{(n-2)}(x) - \varphi_3^{(n-2)}(x)\|_{C[a,b]} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-2n}3!h^2\omega(h2^{-n-1})\, h2^{-n+2}\cdot 2^{-2}\cdot 4 = 2^{-3n}\cdot 4!h^3\omega(h2^{-n-1}).$$

Продолжая это рассуждение, найдем функцию φ вида (4.33) $(\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n)$ такую, что

$$\|f - \varphi\|_{C[a,b]} \leqslant 2^{-n^2}h^n\omega_n(h2^{-n-1})\,(n+2)\,!. \tag{4.42}$$

Теорема 4. *Пусть $f(x) \in C^n[a, b]$. Тогда для всякого $h > 0$ найдется функция φ вида (4.33) такая, что справедливо неравенство (4.42).*

Так как $\dim UP_n^h \approx \dfrac{(b-a)\,2^n}{h}$, то в (4.42)

$$\|f - \varphi\|_C \leqslant \frac{(b-a)^n}{N^n}(n+2)\,!\omega\left(\frac{b-a}{2N}\right).$$

Величина $(n+2)!$ меньше, чем $2^{C_n^2}$, но все еще слишком велика. Более точные оценки константы c_n можно получить, пользуясь методами, изложенными в § 8 гл. 4.

§ 4. О ПРИБЛИЖЕНИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Пусть

$$\mathrm{up}(n;\ x) = \prod_{i=1}^{n}\mathrm{up}(x_i), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{4.43}$$

Теорема 1. *Если $f(x) \in H^m(\mathbb{R}^n)$, то для каждого $h > 0$ существуют коэффициенты c_i^h такие, что*

$$\left\|f(x) - \sum_i c_i^h\,\mathrm{up}\left(n;\ \frac{x - 2^{-m}jh}{h}\right)\right\|_{H^l(\mathbb{R}^n)} \leqslant Ch^{m-l}\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.44}$$

Доказательство. Пусть функция $\omega(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что

а) $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\omega(x)\,\mathrm{dx} = 1;$

б) $\mathrm{supp}\,\omega(x) \subset [-1,\ 1]^n;$

в) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \omega(x)\,dx = 0$ для $0 < |\alpha| \leqslant m$ $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ и

$$u_h(x) = h^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t)\,\omega\left(\frac{t-x}{h}\right) dt.$$

Тогда, как известно

$$\|u - u_h\|_{H^l(\mathbb{R}^n)} \leqslant Ch^{m-l} \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}, \qquad u_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \tag{4.45}$$

$$|D^\alpha u_h(x)| = h^{-n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u(t)\,\omega\left(\frac{t-x}{h}\right) dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant h^{-\frac{n}{2}} \|D^\alpha u(t)\|_{L_2(\Omega_{x,h})} \|\omega\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant h^{-\frac{n}{2}} \|u\|_{H^m(\Omega_{x,h})} \|\omega\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.46}$$

где $\Omega_{x,h}$ — шар с центром в точке x и радиусом $2\sqrt{n}h$ (в силу финитности $\omega(x)$). Поэтому существуют коэффициенты c_j^h такие, что при $|x - k2^{-m}h| < h$

$$\left| D^\alpha \left(u_k(x) - \sum_j c_j^h \operatorname{up}\left(n;\ \frac{x - 2^{-m}jh}{h}\right)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant Ch^{m-|\alpha|} h^{-\frac{n}{2}} \|u\| H^m (\Omega_{k2-n_{n},h}). \tag{4.47}$$

(Здесь использована теорема о приближении сдвигами сжатий функции $\operatorname{up}(n; x)$ функций из $C^m[I^n]$, которая формулируется и доказывается совершенно так же, как теоремы 1—4 § 3 для одномерного случая [66]). Поэтому

$$\left\| u_h - \sum_j c_j^h \operatorname{up}\left(n;\ \frac{x}{h} - 2^{-m}j\right)\right\|_{H^l(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 h^{m-l} \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.48}$$

откуда, учитывая (4.45), приходим к утверждению теоремы.

§ 5. ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ (ТИПА ТЕОРЕМ БЕРНШТЕЙНА) О ПРИБЛИЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ СДВИГОВ СЖАТИЙ ФУНКЦИИ up(x)

Теорема 1. *Если для всякого $h > 0$ существуют коэффициенты c_j^h такие, что*

$$\left| f(x) - \sum_j c_j^h \operatorname{up}\left(\frac{x}{h} - 2^{-n} jh\right)\right| \leqslant Ch^{n+\alpha} \tag{4.49}$$

при $x \in [a, b]$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, то $f(x) \in C^n[a, b]$, и для $\alpha < 1$ $f^{(n)}(x) \in \mathrm{Lip}_C\,\alpha$, а для $\alpha = 1$ $f^{(n)}(x) \in Z$, ($f(x) \in Z$, если $\forall h$ $|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| > Ch$).

Доказательство. Пусть φ_h — линейная комбинация сдвигов сжатий функции up (x) такая, что $|f(x)-\varphi_h(x)|\leqslant Ch^{n+\alpha}$. Тогда

$$f(x)=\varphi_1(x)+(\varphi_{\frac{1}{2}}(x)-\varphi_1(x))+\cdots+(\varphi_{2^{-m}}(x)-$$

$$-\varphi_{2^{-m+1}}(x))+\cdots \tag{4.50}$$

Из теоремы 1 § 1 следует, что этот ряд можно n раз дифференцировать и, кроме того,

$$|\varphi^{(p)}_{2^{-m}}(x)-\varphi^{(p)}_{2^{-m+1}}(x)|\leqslant C2^{m(p-n)+n-m\alpha}. \tag{4.51}$$

Пусть $\alpha<1$. Тогда

$$|f^{(n)}(x+h)-f^{(n)}(x)|=\Bigg|\sum_{m=0}^{[\log_{\frac{1}{2}}h]}\{\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x+h)-$$

$$-\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x+h)-\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x)+\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x)\}+$$

$$+\sum_{m=[\log_{\frac{1}{2}}h]+1}^{\infty}\{\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x+h)-\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x+h)-$$

$$-\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x)+\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x)\}\Bigg|. \tag{4.52}$$

Из (4.51) получаем

$$\Bigg|\sum_{m=0}^{[\log_{\frac{1}{2}}h]}\{\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x+h)-\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x+h)-\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x)+\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x)\}\Bigg|=$$

$$=\Bigg|\sum_{m=0}^{[\log_{\frac{1}{2}}h]}(\varphi^{(n+1)}_{2^{-m}}(x+\theta h)-\varphi^{(n+1)}_{2^{-m+1}}(x+\theta h)h\Bigg|\leqslant\frac{Ch^{\alpha}}{2^{1-\alpha}-1};$$

$$\Bigg|\sum_{m=[\log_{\frac{1}{2}}h]+1}^{\infty}\{\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x+h)-\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x+h)-\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x)+$$

$$+\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x)\}\Bigg|\leqslant 2C\sum_{m=[\log_{\frac{1}{2}}h]+1}^{\infty}2^{n+n\alpha-m\alpha}\leqslant 2^{n+1+n\alpha}C\frac{h^{\alpha}}{1-2^{-\alpha}}=$$

$$=C_1h^{\alpha}.$$

Поэтому $|f^{(n)}(x+h)-f^{(n)}(x)|\leqslant Ch^{\alpha}$ и $f^{(n)}\in \mathrm{Lip}^{\alpha}_{C}$.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$|f^{(n)}(x+h) + f^{(n)}(x-h) - 2f^{(n)}(x)| = \Bigg| \sum_{m=0}^{[\log_{\frac{1}{2}} h]} \{\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x+h) -$$

$$- \varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x+h) + \varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x-h) - \varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x-h) - 2\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x) +$$

$$+ 2\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x)\} + \sum_{m=[\log_{\frac{1}{2}} h]}^{\infty} \{\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x+h) - \varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x+h) +$$

$$+ \varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x-h) - \varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x-h) - 2\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x) + 2\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x)\} \Bigg|.$$

Из (4.51) получаем

$$\Bigg| \sum_{m=0}^{[\log_{\frac{1}{2}} h]} \{\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x+h) - \varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x+h) + \varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x-h) -$$

$$- \varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x-h) - 2\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x) + 2\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x)\} \Bigg| =$$

$$= \Bigg| \sum_{m=0}^{[\log_{\frac{1}{2}} h]} (\varphi^{(n+2)}_{2^{-m}}(x+\theta h) - \varphi^{(n+2)}_{2^{-m+1}}(x+\theta h)) h^2 \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{m=0}^{[\log_{\frac{1}{2}} h]} h^2 2^{2m-m} \leqslant Ch^2 2^{[\log_{\frac{1}{2}} h]} \leqslant Ch;$$

$$\Bigg| \sum_{m=[\log_{\frac{1}{2}} h]+1} \{\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x+h) - \varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x+h) + \varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x-h) -$$

$$- \varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x-h) - 2\varphi^{(n)}_{2^{-m}}(x) + 2\varphi^{(n)}_{2^{-m+1}}(x)\} \Bigg| = \Bigg| \sum_{m=0}^{[\log_{\frac{1}{2}} h]} \times$$

$$\times (\varphi^{(n+2)}_{2^{-m}}(x+\theta h) - \varphi^{(n+2)}_{2^{-m+1}}(x+\theta h)) h^2 \Bigg| \leqslant 2C \sum_{m=[\log_{\frac{1}{2}} h]+1} 4 \cdot 2^{n+n-m} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{m=[\log_{\frac{1}{2}} h]+1} 2^{-m} \leqslant C_2 h.$$

Поэтому $f^{(n)}(x) \in Z$.

Теорема 1. *Пусть финитная функция* $\varphi(x) \in C_0^\infty$ *удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы § 4 гл. 3 и выражения вида* $\sum_k c_k \varphi\left(\frac{x}{h} - 2^{-n}k\right)$ *плотны в* $C^n[a, b]$ *для некоторого* $[a, b]$ *и всех* $n \in N$. *Тогда* $\varphi(x) \equiv \mathrm{up}(x)$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует h_0 и c_k^h такие, что при $h \leqslant h_0$

$$\left|1 - \sum_k c_k \varphi\left(\frac{x}{h} - k\right)\right| < \varepsilon$$

на $[a, b]$. Поэтому на $\left[\frac{a}{h}, \frac{b}{h}\right]$

$$\left|1 - \sum_k c_k \varphi(x - k)\right| < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε существуют такие коэффициенты $\tilde{c}_k$, что $\sum_k \tilde{c}_k \varphi(x - k) \equiv 1$. То же справедливо и для производных функции $\varphi(x)$. Следовательно, функция $\varphi(x)$ представляет собой многочлены (выполнено условие 3 теоремы § 4 гл. 3 и по этой теореме $\varphi(x) \equiv \mathrm{up}(x)$).

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x) \in C_0^\infty$, $\mathrm{supp}\, \varphi = [-1, 1]$, *удовлетворяются условия 1, 2 теоремы § 4 гл. 3 и для любого* $n \in N$ *и для любой функции* $f(x) \in C^n[a, b]$ $\forall h > 0$ $\exists c_j^h$ *(для некоторого* $[a, b]$*) такие, что*

$$\left\| f(x) - \sum_j c_j^h \varphi\left(\frac{x}{h} - 2^{-n}j\right)\right\|_{C[a,b]} \leqslant Ch^n \omega(f^{(n)}, h).$$

Тогда $\varphi(x) \equiv \mathrm{up}(x)$.

Доказательство. Из неравенства

$$\left|x^n - \sum_j c_j^h \varphi\left(\frac{x}{h} - j2^{-n}\right)\right| < Ch^{n+1}$$

следует

$$\left|x^n - \sum_j c_j^h h^{-n} \varphi(x - k2^{-n})\right| < Ch \to 0, \qquad h \to 0,$$

откуда

$$x^n \equiv \sum_k \tilde{c}_k^n \varphi(x - k2^{-n}),$$

и по теореме единственности из § 4 гл. 3 $\varphi(x) \equiv \mathrm{up}(x)$. (Здесь и в предыдущей теореме использован тот факт, что на фиксированном интервале $[a, b]$ и при фиксированном n функции $\sum_j c_k \varphi(x - k2^{-n})$ образуют конечномерное подпространство пространства $C[a, b]$.)

§ 7. О ПРИБЛИЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ СДВИГОВ ФУНКЦИИ $\mathrm{up}(x)$

Теорема 1. *Для каждого конечного* $[a, b]$ *существует последовательность n-мерных подпространств* $L\,\mathrm{up}_n\,[a, b] \subset C\,[a, b]$, *таких, что*

1) $L\,\mathrm{up}_n\,[a, b]$ *есть линейная оболочка n сдвигов функции* $\mathrm{up}\,(x)$;

2) $L\,\mathrm{up}_n\,[a, b] \subset L\,\mathrm{up}_{n+1}\,[a, b]$;

3) для любого натурального r и любой функции $f(x) \in C^r\,[a, b]$ *начиная с некоторого* $n = n\,(r, a, b)$

$$\inf_{\varphi_n \in L\mathrm{up}_n[a,b]} \| f - \varphi_n \|_{C[a,b]} \leqslant c_r\,(b-a)^r n^{-r} \| f^{(r)} \|_{C[a,b]},$$

где c_r *зависит только от r.*

Доказательство. 1. Построим $L\mathrm{up}_n\,[a, b]$ для $[a, b]$ вида $[k2^{-l}, (k+1)\,2^{-l}]$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Пусть $Q_s = \{k2^{-s};\ s \in \mathbb{Z}\}$; $\mathrm{UP}_s(-\infty, +\infty)$ — пространство, порожденное функциями $\mathrm{up}\,(x-\alpha)$, $\alpha \in Q_s$; $\mathrm{UP}_s\,(k, l)$ — ограничение $\mathrm{UP}_s\,(-\infty, \infty)$ на отрезок $[k2^{-l}, (k+1)\,2^{-l}]$; $s\,(n)$ — наибольшее из s таких, что $\dim UP_s\,(k, l) \leqslant n$.

Нетрудно показать, что

$$\dim UP_s\,(k, l) = 2^{s-l} + s + 1, \qquad s \geqslant l.$$

Действительно, оператор D^{s+2} $(s+2)$-кратного дифференцирования переводит $\mathrm{UP}_s\,(k, l)$ в 2^{s-l}-мерное пространство функций вида $\sum_j c_j\,\mathrm{up}\,(2^{s+2}x - 2 + 4j)$, а ядро D^{s+2} $(s+1)$-мерно.

Фиксируем $\gamma : N \to \mathbb{Z}$ — биекцию натуральных чисел на целые. Далее поступаем следующим образом. За $L\,\mathrm{up}_n^{(0)}$ принимаем $\mathrm{UP}_{s(n)}\,(k, l)$. Если $\dim L_n^{(j)} < n$, то положим

$$L\,\mathrm{up}_n^{(j+1)} = \{L\,\mathrm{up}_n^{(j)} \cup \mathrm{up}\,(x - (2\gamma\,(j) + 1)\,2^{-s(n)-1})\},$$

где фигурные скобки означают линейное пространство, порожденное заключенным в них множеством. Так как начиная с некоторого j $L\,\mathrm{up}_n^{(j)} = \mathrm{UP}_{s(n)+1}\,(k, l)$, а $\dim \mathrm{UP}_{s(n)+1}\,(k, l) > n$ по самому определению $s\,(n)$, то существует j_0 такое, что $\dim L\,\mathrm{up}_n^{(j_0)} = n$.

Положим $L\,\mathrm{up}_n\,[k2^{-l}, (k+1)\,2^{-l}] = L\,\mathrm{up}_n^{(j_0)}$. Из построения пространств $L\,\mathrm{up}_n\,[k2^{-l}, (k+1)\,2^{-l}]$ очевидно, что

$$L\,\mathrm{up}_n\,[k2^{-l}, (k+1)\,2^{-l}] \subset L\,\mathrm{up}_{n+1}\,[k2^{-l}, (k+1)\,2^{-l}].$$

Рассмотрим теперь произвольный конечный отрезок $[a, b]$. Пусть $l_0 = \max\limits_{l \in L} l$, где $L = \{l : Q_l \cap [a, b] \neq \varnothing\}$; k_0 таково, что $[a, b] \subseteq [k_0 2^{-l_0}, (k_0+1)\,2^{-l_0}]$; $R_n\,[a, b]$ — ограничение на отрезок $[a, b]$ пространства $L\,\mathrm{up}_n\,[k_0 2^{-l_0}, (k_0+1)\,2^{-l_0}]$. Очевидно, что $\dim R_n\,[a, b] \leqslant n$, $R_n\,[a, b] \subseteq R_{n+1}\,[a, b]$ и для каждого n существует такое $m\,(n) \geqslant n$, что $\dim R_{m(n)}\,[a, b] = n$.

Положим $L\,\mathrm{up}_n\,[a,\ b] = R_{m(n)}\,[a,\ b]$. Заметим, что если будет доказана теорема для отрезков вида $[k2^{-l},\ (k+1)\,2^{-l}]$, то она будет верна и для всех $[a,\ b]$. Действительно, $f(x) \in C^r\,[a,\ b]$ продолжается на $[k_0 2^{-l_0},\ (k_0+1)\,2^{-l_0}]$ так, что

$$\|f\|_{C^r[k_0 2^{-l_0},(k_0+1)2^{-l_0}]} \leqslant C\,\|f\|_{C^r[a,b]},$$

а по построению l_0, k_0 длина отрезка $[k_0 2^{-l_0},\ (k_0+1)\,2^{-l_0}]$ не более чем в 4 раза превышает длину отрезка $[a,\ b]$.

2. Докажем теорему для отрезка $[k2^{-l},\ (k+1)\,2^{-l}]$ и $r = 1$. Пусть для краткости $H = C\,[k2^{-l},\ (k+1)\,2^{-l}]$. Достаточно доказать теорему для $f(x) \in \tilde{C}^1\,[k2^{-l},\ (k+1)\,2^{-l}]$, где $\tilde{C}^1\,[a,\ b]$ — подпространство $C^1\,[a,\ b]$, состоящее из функций $f(x)$ таких, что $f(a) = f(b)$, т. е. для периодического случая. Действительно, если $f(x)$ — непериодична, то функция $f_1(x) = f(x) + P_1(x)$, где $P_1(x)$ — некоторый многочлен первой степени, уже периодична и $\|f_1'\|_H \leqslant C\,\|f_1'\|_H$, а

$$P_1(x) \in \mathrm{UP}_1\,[k2^{-l},\ (k+1)\,2^{-l}] \subseteq L\,\mathrm{up}_n\,[k2^{-l},\ (k+1)\,2^{-l}]$$

при достаточно больших n.

Сделаем замену переменных. Положим $y = 2^{l+1}\pi\,(x - (2k+1)\,2^{-l-1})$. Тогда отрезок $[k2^{-l},\ (k+1)\,2^{-l}]$ преобразуется в $[-\pi,\ \pi]$. Пусть $f(x) \in \tilde{C}^1\,[k2^{-l},\ (k+1)\,2^{-l}]$ и

$$f_1(y) = f\left(\frac{y}{2^{l+1}\pi} + (2k+1)\,2^{-l-1}\right).$$

Тогда

$\|f_1'(y)\|_{C[-\pi,\pi]} = \pi^{-1} 2^{-l-1}\,\|f'(x)\|_H$. Приблизим $f_1(y)$ тригонометрическим многочленом $T_M(y)$ степени $M = 2^{s(n)-l-1}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|f_1(y) - T_M(y)\|_{C[-\pi,\pi]} \leqslant \frac{C}{M}\,\|f_1'(y)\|_{C[-\pi,\pi]}, \tag{4.53}$$

что, как известно, возможно. Таким образом,

$$\|f_1(y) - T_M(y)\|_{C[-\pi,\pi]} \leqslant C2^{-s(n)-1}\pi^{-1}\,\|f(x)\|_H \leqslant \frac{C}{n}\,2^{-l}\,\|f'(x)\|_H. \tag{4.54}$$

(В приведенных выкладках константа C в различных местах имеет неодинаковые значения). Тогда

$$\|T_M'(y)\|_{C[-\pi,\pi]} \leqslant C\,\|f_1'(y)\|_{C[-\pi,\pi]}. \tag{4.55}$$

Действительно, если $a = \max|T_M'(y)| = |T_M'(y_0)|$, то согласно (4.53)

$$\left|T_M\left(y_0 + \frac{1}{M}\right) - T_M(y_0)\right| \leqslant \frac{C}{M}\,\|f_1'(y)\|_{C[-\pi,\pi]}. \tag{4.56}$$

Но

$$T_M\left(y_0+\frac{1}{M}\right)-T_M(y_0)=T'_M(y_0)\frac{1}{M}-\int\limits_{y_0}^{y_0+\frac{1}{M}}\left(\frac{1}{M}-t\right)T''_M(t)\,\mathrm{dt}.$$

По неравенству Бернштейна $|T''_M(t)|\leqslant Ma$. Поэтому

$$\left|T_M\left(y_0+\frac{1}{M}\right)-T_M(y_0)\right|\geqslant\frac{a}{M}-\left|\int\limits_{y_0}^{y_0+\frac{1}{M}}\left(\frac{1}{M}-t\right)T''_M(t)\,\mathrm{dt}\right|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{a}{M}-Ma\int\limits_{y_0}^{y_0+\frac{1}{M}}\left(\frac{1}{M}-t\right)\mathrm{dt}=\frac{a}{2M}.$$

Из (4.56) получаем $a\leqslant C\|f'_1(y)\|_{C[-\pi,\pi]}$. Из (4.55) согласно неравенству Бернштейна

$$\|T_M^{(s(n)+1)}(y)\|_{C[-\pi,\pi]}\leqslant CM^{s(n)}\|f'_1(y)\|_{C[-\pi,\pi]}. \tag{4.57}$$

Приблизим $T_M(y)$ обыкновенным полиномиальным сплайном $\mathrm{Spl}(y)$ степени $s(n)$ на равномерной сетке с шагом $\frac{\pi}{M}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|T_M(y)-\mathrm{Spl}(y)\|_{C[-\pi,\pi]}\leqslant CM^{-s(n)-1}\|T_M^{(s(n)+1)}(y)_{C[-\pi,\pi]};$$

здесь C — абсолютная константа, что возможно в силу результатов В. М. Тихомирова [1, 74]. Таким образом, из (4.57) следует

$$\|T_M(y)-\mathrm{Spl}(y)\|_{C[-\pi,\pi]}\leqslant\frac{C}{M}\|f'_1(y)\|_{C[-\pi,\pi]}. \tag{4.58}$$

Из (4.54) и (4.58) получаем

$$\|f(x)-\mathrm{Spl}_1(x)\|_H\leqslant\frac{C}{M}2^{-l}\|f'(x)\|_H\leqslant\frac{C}{n}2^{-l}\|f'(x)\|_H, \tag{4.59}$$

где

$$\mathrm{Spl}_1(x)=\mathrm{Spl}(2^{l+1}\pi(x-(2k+1)2^{-l-1})).$$

(Так как $M=2^{s(n)-l-1}$, $2^{s(n)-l+1}+s(n)+1\geqslant n$, то $M>\alpha n$, где $\alpha>0$ и не зависит от n.)

Свернем теперь $\mathrm{Spl}_1(x)$ — сплайн степени $s(n)$ на равномерной сетке с шагом $2^{-s(n)}$ и функцию $\varphi(x)=2^{s(n)+1}\,\mathrm{up}\,(x2^{-s(n)-1})$ («сглаживающее ядро»). Тогда

$$\|\mathrm{Spl}_1(x)-\varphi(x)*\mathrm{Spl}_1(x)\|_H\leqslant C2^{-l}M^{-1}\|f'(x)\|_H. \tag{4.60}$$

Таким образом, из (4.59) и (4.60) получаем

$$\|f(x)-\varphi(x)*\mathrm{Spl}_1(x)\|_H\leqslant C2^{-l}n^{-1}\|f'(x)\|_H. \tag{4.61}$$

Остается заметить, что

$$\varphi(x)*\mathrm{Spl}_1(x)\in\mathrm{UP}_{s(n)}[k,\ l]\subseteq L\,\mathrm{up}_n[k2^{-l},\ (k+1)2^{-l}].$$

Лемма. *Пусть $S(x)$ — сплайн (обыкновенный, полиномиальный дефекта 1) степени j на сетке с шагом 2^{-l}. Тогда*

$$\mathrm{up}\,(2^{-l-1}x) * S(x) \in \mathrm{UP}_l\,(-\infty,\ \infty).$$

Лемма доказывается интегрированием $j+1$ раз по частям в свертке. Сплайн степени j при $(j+1)$-кратном дифференцировании превращается в линейную комбинацию сдвигов δ-функции по той же сетке, а $(j+1)$-кратный интеграл от $\mathrm{up}\,(2^{-l-1}\,x)$ в силу функционально-дифференциального уравнения для функции $\mathrm{up}\,(x)$ переходит в линейную комбинацию сдвигов функции $\mathrm{up}\,(x)$.

Замечание. Свертки сплайнов (не обязательно с дефектом 1) и линейных комбинаций сдвигов сжатий функции $\mathrm{up}\,(x)$ представляют собой линейные комбинации сдвигов сжатий функции $\mathrm{up}\,(x)$, т. е. пространство линейных комбинаций сдвигов сжатий функции $\mathrm{up}\,(x)$ является модулем над кольцом сплайнов со сверткой в качестве умножения.

Таким образом, для $r=1$ теорема доказана. Далее доказательство проводится индукцией по r.

Пусть для $r=r_0+1$ доказано, что для любого отрезка вида $[k2^{-l},\ (k+1)\,2^{-l}]$ $f\in C^{r_0-1}[k2^{-l},\ (k+1)\,2^{-l}]$,

$$\inf_{\varphi\in UP_{s(n)}[k,l]}\|f-\varphi\|_H \leqslant C2^{-s(n)(r_0-1)}\,\|f^{(r_0-1)}\|_H$$

и $f\in C^{r_0}\,[k2^{-l},(k+1)\,2^{-l}]$. Тогда $g(x)=f'\left(\frac{x}{2}\right)\in C^{r_0-1}\,[k2^{-l+1},\ (k+1)\,2^{-l+1}]$. Следовательно, существует функция $\varphi(x)\in UP_{s(n)-1}\times(k,\ l-1)$ такая, что

$$\|g(x)-\varphi(x)\|_{C[k2^{-l+1},(k+1)2^{-l+1}]}\leqslant C2^{-(s(n)-1)(r_0-1)}\times$$
$$\times\|g^{(r_0-1)}\|_{C[k2^{-l+1},(k+1)2^{-l+1}]}.$$

Пусть $h(x)=f(x)-\int\varphi\,(2x)\,dx$;

$$\|h'(x)\|_H=\|f'(x)-\varphi(2x)\|_H\leqslant C2^{-(s(n)-1)(r_0-1)}\,\|f^{(r_0)}\|_H.$$

Из справедливости теоремы для $r=1$ следует, что существует функция $h_1(x)\in \mathrm{UP}_{s(n)}\,[k,\ l]$ такая, что

$$\|h(x)-h_1(x)\|_H\leqslant Cn^{-l}2^{-l}\,\|h'(x)\|_H\leqslant Cn^{-r_0}2^{-l}\,\|f^{(p)}\|_H.$$

Заметим, что $\int\varphi\,(2x)\,dx\in UP_{s(n)}\,(k,\ l)$, так как $\varphi(x)\in \mathrm{UP}_{s(n)-1}\,(k,\ l-1)$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что величина $s(n)-l-1$ неотрицательна. Поэтому-то неравенство в третьем условии формулировки теоремы начинает выполняться только с некоторых n, а именно:

$$[\log_2 n]+1>l+1. \tag{4.62}$$

С использованием классической теории приближений для периодического случая получены значительно более точные результаты, чем теорема 1.

§ 8. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ СДВИГОВ ФУНКЦИИ $\mathrm{up}(x)$

Для удобства сравнения с результатами классической теории приближений тригонометрическими полиномами и полиномиальными сплайнами рассмотрим функции $f(x) \in \tilde{C}^r[-\pi, \pi]$, т. е. такие, для которых $f(x) \in \tilde{C}^r[-\pi, \pi]$, $f^{(i)}(\pi) = f^{(i)}(-\pi)$, $i = 0, \ldots, r-1$. Как известно [26, 74],

$$\sup_{\substack{\|f^{(r)}\|_{C[-\pi,\pi]}<1,\\ f\in\tilde{C}^r[-\pi,\pi]}} \inf_{\varphi\in T_{2n+1}} \|f-\varphi\|_{C[-\pi,\pi]} = \frac{K_r}{(n+1)^r}, \tag{4.63}$$

где $K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^r}$, а T_{2n+1} — $(2n+1)$-мерное пространство тригонометрических полиномов степени, не превосходящей n. Кроме того [74],

$$d_{2n+1}(\tilde{W}^r) = d_{2n+2}(\tilde{W}^r) = \frac{K_r}{(n+1)^r}, \tag{4.64}$$

где $d_n(A)$ — n-поперечник по А. Н. Колмогорову в метрике $C[-\pi, \pi]$ компакта A, т. е.

$$d_n(A) = \inf_{L_n\in U_n}\sup_{\psi\in A}\inf_{\varphi\in L_n}\|\psi-\varphi\|_{C[-\pi,\pi]}; \tag{4.65}$$

здесь U_n — совокупность всех n-мерных подпространств $C[-\pi, \pi]$, а $\tilde{W}^r = \{f\in\tilde{C}^r : \|f^{(r)}\|_{C[-\pi,\pi]} \leqslant 1\}$.

Таким образом, никакие линейные пространства не могут приближать функции из $\tilde{W}^r$ лучше, чем, согласно (4.63), тригонометрические полиномы. Как показал В. М. Тихомиров [74], обыкновенные полиномиальные сплайны степени $r-1$ на равномерной сетке приближают функции из $\tilde{W}^r$ так же хорошо. Покажем, что пространства линейных комбинаций сдвигов функции $\mathrm{up}\left(\frac{x}{\pi}\right)$ приближают функции из $\tilde{W}^r$ почти так же хорошо, а именно:

$$\sup_{f\in\tilde{W}^r}\inf_{\varphi\in\widetilde{UP}_n}\|f-\varphi\|_{C[-\pi,\pi]} \leqslant \frac{K_r+\alpha_r(n)}{2^{nr}}, \tag{4.66}$$

где размерность пространства $\widetilde{\mathrm{UP}}_n$ сдвигов функции $\mathrm{up}\left(\frac{x}{\pi}\right)$ равна 2^{n+1}, а $\alpha_r(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 1. Последовательность $\{L_k\}$, $L_k \subset C[-\pi, \pi]$, $\dim L_k = N_k \to \infty$, назовем экстремальной для $A \subset C[-\pi, \pi]$, если

$$\sup_{\varphi \in A} \inf_{\psi \in L_k} \|\varphi - \psi\|_{C[-\pi,\pi]} = d_{N_k}(A).$$

Определение 2. Последовательность $\{L_k\}$, $L_k \subset C[-\pi, \pi]$, $\dim L_k = N_k \to \infty$, назовем асимптотически экстремальной для $A \subset C[-\pi, \pi]$, если

$$\sup_{\varphi \in A} \inf_{\psi \in L_k} \|\varphi - \psi\|_{C[-\pi,\pi]} = (1 + \alpha(k))\, d_{N_k},$$

где $\alpha(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Таким образом, требуется доказать, что последовательность $\{\tilde{\mathrm{UP}}_m\}$ асимптотически экстремальна для $\tilde{W}^r$ при всех $r \in N$. (Возможно, что $\alpha_r(m)$ в (4.66) начиная с некоторого m равно 0 и пространства $\tilde{\mathrm{UP}}_m$ являются экстремальными.) Для практических применений асимптотически экстремальные последовательности подпространств так же хороши, как и экстремальные, поскольку различие в погрешности приближения является бесконечно малой более высокого порядка, чем эта погрешность, а на практике, как правило, важен порядок и первая значащая цифра погрешности.

Идея доказательства неравенства (4.66) состоит в следующем. В пространствах $\tilde{\mathrm{UP}}_n$ для каждого n можно выбрать базис, «близкий» к функциям $\cos kx$, $\sin kx$ (чем больше n, тем больше эта близость). Оценка (4.63) для приближения тригонометрическими полиномами производится с помощью линейного способа приближения, предложенного Фаваром (см. работу [26]), о чем подробнее сказано ниже. Оператор Фавара $F_{2^{n+1},r}$ каждой функции $f(x)$ из $\tilde{W}^r$ ставит в соответствие тригонометрический полином степени m

$$\varphi = F_{2^{n+1},r} f = \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + a_0 \tag{4.67}$$

так, что

$$\|f - \varphi\|_C \leqslant \frac{K_r}{(m+1)^r}. \tag{4.68}$$

Положив $m = 2^n(1 - \theta_n)$, где соответствующим образом выбрано Θ_n ($\Theta \to 0$ при $n \to \infty$), заменим функции $\sin kx$, $\cos kx$ в (4.68) на "близкие" им элементы базиса $\tilde{\mathrm{UP}}_n$ и получим $\varphi^* \in \tilde{\mathrm{UP}}_n$. Остается показать, что $\|f - \varphi^*\|_C \leqslant \frac{K_r + \alpha_m}{(m+1)^2}$, где $\alpha_m \to 0$ при $m \to \infty$. Для этого достаточно, чтобы $\|\varphi - \varphi^*\|_{C[-\pi,\pi]} \leqslant \frac{\alpha_m}{(m+1)^r}$, где $\alpha_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Пусть $\tilde{\mathrm{UP}}_n[-\pi, \pi]$ (в дальнейшем для краткости просто $\tilde{\mathrm{UP}}_n$) — пространство функций $\varphi(x)$ вида $\varphi(x) = \sum_k c_k \operatorname{up}\left(\frac{x}{\pi} - k2^{-n}\right)$ таких, что $\varphi^{(i)}(\pi) = \varphi^{(i)}(-\pi)$, $i \in \mathrm{N}$, т. е. периодических. Нетрудно заметить, что $\dim \tilde{\mathrm{UP}}_n = 2^{n+1}$. В пространстве $\tilde{\mathrm{UP}}_n$ есть базис, состоящий из сдвигов функции $F\operatorname{up}_n\left(\frac{x}{\pi}\right)$ (см. гл. 3):

$$F\operatorname{up}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} F^{[n]}(t)\,\mathrm{dt}, \qquad (4.69)$$

где

$$F^{[n]}(t) = \left(\frac{\sin t2^{-n-1}}{t2^{-n-1}}\right)^{n+1} \prod_{j=n+2}^{\infty} \frac{\sin t2^{-j}}{t2^{-j}}. \qquad (4.70)$$

Пусть $\pi : \mathbb{R} \to S^1$, $\pi x = y$ — естественная проекция действительной оси $\mathbb{R}$ на окружность единичного радиуса S^1 как универсального накрытия этой окружности. В дальнейшем y — координата точки из S^1 (полярный угол). Можно считать, что $\tilde{\mathrm{UP}}_n$ — пространство функций на S^1 (причем функций класса C^∞). Для четного n в $\tilde{\mathrm{UP}}_n$ имеем базис, состоящий из функций вида

$$\psi_k^{(n)}(y) = F\operatorname{up}_n\left(\frac{y}{\pi} - k2^{-n} + 2^{-n}\right) \qquad (k = 1, \ldots, 2^{n-1}). \quad (4.71)$$

Например, для $n = 0$ $\psi_1^{(0)}(y) = \operatorname{up}\left(\frac{y}{\pi}\right)$; $\psi_2^{(0)}(y) = \operatorname{up}\left(\frac{y}{\pi} - 1\right)$.

Замечание. Если рассматривать $\tilde{\mathrm{UP}}_n$ как пространство функций на $[-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$, то тогда

$$\psi_2^{(0)}(y) = \operatorname{up}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right) + \operatorname{up}\left(\frac{x}{\pi} + 1\right).$$

Для n нечетного

$$\psi_k^{(n)}(y) = F\operatorname{up}_n\left(\frac{y}{\pi} - k2^{-n} + 2^{-n-1}\right), \qquad k = 1, \ldots, 2^{n+1}. \quad (4.72)$$

Разложим функцию $F\operatorname{up}_n\left(\frac{y}{\pi}\right)$ в ряд Фурье. Из (4.69), ввиду того что $\operatorname{supp} F\operatorname{up}_n\left(\frac{x}{\pi}\right) \subseteq [-\pi, \pi]$, следует

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky} F\operatorname{up}_n\left(\frac{y}{\pi}\right)\mathrm{dy} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ik\pi z} F\operatorname{up}_n(z)\,\mathrm{dz} =$$

$$= \frac{1}{2}F^{[n]}(-k\pi) = \frac{1}{2}F^{[n]}(k\pi)$$

(в силу четности функции $F^{[n]}(t)$). Поэтому

$$F\,\mathrm{up}_n\left(\frac{y}{\pi}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F^{[n]}(k\pi)\,e^{iky}. \tag{4.73}$$

Таким образом, для n четного

$$\psi_l^{(n)}(y)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F^{[n]}(k\pi)\,e^{-ik(l-1)2^{-n}\pi}e^{iky}. \tag{4.74}$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iky}\psi_l^{(n)}(y)\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iky}F\,\mathrm{up}_n\left(\frac{y}{\pi}-l2^{-n}+2^{-n}\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ik(z+(l-1)2^{-n}\pi)}F\,\mathrm{up}_n\left(\frac{z}{\pi}\right)dz=\frac{1}{2}F^{[n]}(k\pi)\,e^{-i2^{-n}\pi(l-1)k}.$$

Функции $\psi_l^{(n)}(y)$ неортогональны. Однако их матрица Грама является циркулянтом и ортогонализация проводится очень просто. (Подробнее об этом сказано в § 10.) Положим для n четного

$$\mu_j^{(n)}(y)=2^{-n}\sum_{l=1}^{2^{n+1}}\psi_l^{(n)}(y)\,e^{i(l-1)j2^{-n}\pi}=$$

$$=2^{-n-1}\sum_{l=1}^{2^{n+1}}\sum_{k=\infty-}^{\infty}F^{[n]}(k\pi)\,e^{-ik(l-1)2^{-n}\pi+i(l-1)j2^{-n}\pi}=$$

$$=2^{-n-1}\sum_{k=\infty-}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{2^{n+1}}e^{-i(l-1)2^{-n}(k-j)\pi}\right)e^{iky}. \tag{4.75}$$

Но

$$\sum_{l=1}^{2^{n+1}}e^{-i(l-1)2^{-n}(k-j)\pi}=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-i(k-j)2\pi}}{1-e^{(j-k)2\pi i}}=0 & \text{при } j-k\neq s2^{n+1},\\ 2^{n+1} & \text{при } k=j+s2^{n+1}.\end{cases}$$

Поэтому

$$\mu_j^{(n)}(y)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}F^{[n]}((j+s2^{n+1})\pi)\,e^{i(j+s2^{n+1})y},\qquad j=1,\ \ldots,\ 2^{n+1}. \tag{4.76}$$

В частности, при $j=2^{n+1}$ $\mu_{2^{n+1}}^{(n)}(y)=1$, так как $F^{[n]}(s2^{n+1}\pi)=0$ при $s\neq0$. Положим

$$\nu_j(y)=(\mu_j^{(n)}(y)+\mu_{2^{n+1}-j}^{(n)}(y))\,2^{-1},\qquad j=1,\ \ldots,\ 2^n; \tag{4.77}$$

$$\nu_j(y)=(\mu_{j-2^n}^{(n)}(y)-\mu_{2^{n+1}+2^n-j}^{(n)}(y))\,(2i)^{-1},\qquad j=2^n+1,\ \ldots,\ 2^{n+1}-1; \tag{4.78}$$

наконец,

$$\nu_{2^n+1}(y) = \mu_{2^n+1}(y) = 1. \tag{4.79}$$

Таким образом, из (4.76) следует

$$\nu_j(y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} F^{[n]}((j + s2^{n+1})\pi)\cos(j + s2^{n+1})y, \qquad j = 1, \ldots, 2^n. \tag{4.80}$$

Для $j = 1, \ldots, 2^n - 1$

$$\nu_j(y) = \cos jy \cdot F^{[n]}(j\pi) + \sum_{s\neq 0} F^{[n]}((j + s2^{n+1})\pi)\cos((j + s2^{n+1})y).$$

Положим

$$\tilde{\nu}_j(y) = \nu_j(y)/F^{[n]}(j\pi) = \cos jy + \sum_{s\neq 0} \frac{F^{[n]}((j + s2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(j\pi)}\cos((j + s2^{n+1})y). \tag{4.81}$$

Для малых j коэффициенты $\frac{F^{[n]}((j + s2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(j\pi)}$ при $s \neq 0$ очень малы, так как в точках $\pi k 2^{n+1}$, $k \neq 0$, у функции $F^{[n]}(t)$ нули не менее $(n + 1)$-го порядка. Поэтому функции $\tilde{\nu}_j^{(n)}(y)$ для малых j близки к $\cos jy$. Для любого фиксированного j $\tilde{\nu}_j^{(n)}(y) \to \cos jy$ при $n \to \infty$ по любой обычно используемой норме. Для $j = 2^n$

$$\nu_{2^n}(y) = 2F^{[n]}(2^n\pi)\cos 2^n y + \sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0;-1}}^{\infty} F^{[n]}((2^n + s2^{n+1})\pi) \times \cos(2^n + s2^{n+1})y.$$

Положим

$$\tilde{\nu}_{2^n}(y) = \nu_{2^n}(y)/2F^{[n]}(2^n\pi). \tag{4.82}$$

Следовательно, для этого случая

$$\nu_j^{(n)}(y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} F^{[n]}((j - 2^n + s2^{n+1})\pi)\sin(j - 2^n + s2^{n+1})y. \tag{4.83}$$

Таким образом, для $j = 2^n + 1, \ldots$

$$\nu_j^{(n)}(y) = \sin(j - 2^n)y \cdot F^{[n]}((j - 2^n)\pi) + \sum_{s\neq 0} F^{[n]}((j - 2^n + s2^{n+1})\pi)\sin(j - 2^n + s2^{n+1})y.$$

Положим для $j = 1, \ldots, 2^n - 1$

$$\tilde{\mu}_j^{(n)}(y) = \nu_{j+2^n}(y)/F^{[n]}(j\pi). \tag{4.84}$$

Тогда

$$\tilde{\mu}_j^{(n)} = \sin jy + \sum_{s \neq 0} \frac{F^{[n]}((j + s2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(j\pi)} \sin(j + s2^{n+1})\, y. \qquad (4.85)$$

Для малых j функция $\tilde{\mu}_j^{(n)}(y)$ близка к $\sin jy$. Для любого фиксированного j

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{\mu}_j^{(n)}(y) = \sin jy. \qquad (4.86)$$

Аналогичные построения можно провести и для нечетного n.

Перейдем к построению линейного способа приближения функций из $\tilde{W}^r$. Как известно [26, 74], имеет место представление

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\, D_0^{(r)}(x - t)\, dt, \qquad (4.87)$$

где

$$D_0^{(r)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}. \qquad (4.88)$$

Оператор Фавара имеет вид

$$F_m f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x - t) \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(m)} \frac{\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\, dt =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(r)} \frac{\cos\left(k(x - t) - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\, dt, \qquad (4.89)$$

где коэффициенты $\lambda_k^{(m)}$ вычисляются для r четного по формуле [26]

$$\lambda_k^{(m)} = \lambda_r\left(\frac{k}{m+1}\right) = 1 - k^r \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left\{ \frac{1}{[2\nu(m+1) - k]^r} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{[2\nu(m+1) + k]^r} \right\}. \qquad (4.90)$$

При этом, как известно, $\|f - F_m f\|_{C[-\pi,\pi]} \leqslant \frac{K_r}{(m+1)^r}$. Из (4.89) получаем

$$F_m f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r} \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) \cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r} \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) \sin\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right) dt.$$

Положим

$$\varphi_n(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r}\tilde{\nu}_k(x)\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(t)\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r}\bar{\mu}_k(x)\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(t)\sin\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)dt. \qquad (4.91)$$

Оценим $\|F_m(x)-\varphi_m(x)\|_{C[-\pi,\pi]}$. Имеем

$$\varphi_n(x)-F_m(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(t)\sum_{s\neq 0}\frac{F^{[n]}((k+s2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(k\pi)}\times$$

$$\times(\cos(k+s2^{n+1})x\cdot\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)+\sin(k+s2^{n+1})x\times$$

$$\times\sin\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)\Big)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r}\sum_{s\neq 0}\frac{F^{[n]}((k+s2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(k\pi)}\times$$

$$\times\cos\left((k+s2^{n+1})x-kt-\frac{r\pi}{k}\right)dt. \qquad (4.92)$$

Таким образом,

$$\left|\varphi_n(x-F_m(x)\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r}\sum_{s\neq 0}\frac{F^{[n]}((k+s2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(k\pi)}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left(ku+s2^{n+1}x-\frac{r\pi}{2}\right)\right|du$$

(так как $|f^{(r)}(t)|\leqslant 1$). Далее,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r}\sum_{s\neq 0}\frac{F^{[n]}((k+s2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(k\pi)}\cos\left(ku+s2^{n+1}x-\frac{r\pi}{2}\right)\right|du\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{s\neq 0}I_s,$$

где

$$I_s=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r}\frac{F^{[n]}((k+s2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(k\pi)}\cos\left(ku+s2^{n+1}x-\frac{r\pi}{2}\right)\right|du.$$

Из (4.70) для $s \neq 0; -1$ получаем

$$\left| \frac{F^{[n]}((k+s2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(k\pi)} \right| = \left| \frac{\dfrac{\sin^{n+1}(k\pi 2^{-n-1}+s\pi)}{(k\pi 2^{-n-1}+s\pi)^{n+1}} \displaystyle\prod_{j=n+2}^{\infty} \frac{\sin(k\pi+s2^{n+1}\pi)2^{-j}}{(k\pi+s2^{n+1}\pi)2^{-j}}}{\dfrac{\sin^{n+1}(k\pi 2^{-n-1})}{(k\pi 2^{-n-1})^{n+1}} \displaystyle\prod_{j=n+2}^{\infty} \frac{\sin k\pi 2^{-j}}{k\pi 2^{-j}}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{k^{n+1}}{(k+s2^{n+1})^{n+1}} \quad \text{для } s>0;$$

$$\leqslant C \frac{k^{n+1}}{(|s|\,2^{n+1}-k)^{n+1}} \quad \text{для } s<-1.$$

Поэтому

$$I_s \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(m)} \frac{k^{n+1-r}}{(k+s2^{n+1})^{n+1}} \left| \cos\left(ku+s2^{n+1}x-\frac{r\pi}{2}\right) \right| du \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{1}{(s2^{n+1})^r} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(m)} \left(\frac{1}{k+s2^{n+1}}\right)^{n+1-r} du =$$

$$= C \frac{2\pi}{s^r N^r} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(m)} \left(\frac{k}{k+s2^{n+1}}\right)^{n+1-r}, \qquad N = 2^{n+1}.$$

Но при $s \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$

$$\frac{k}{k+s2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{1+2s} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Действительно, $\left(\dfrac{x}{x+a}\right)' = \dfrac{a}{(x+a)^2}$. Следовательно, $\dfrac{k}{k+s2^{n+1}}$ возрастает и принимает наибольшее значение при $k=m$:

$$\frac{k}{k+s2^{n+1}} \leqslant \frac{m}{m+s2^{n+1}} \leqslant \frac{2^n}{2^n+s2^{n+1}} = \frac{1}{1+s2}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{k}{k+s2^{n+1}}\right)^{n+1-r} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-r} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3(n+1-r)} \leqslant \frac{C_{r,1}}{N^{\log_2 3}}.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(m)} \left(\frac{k}{k+s2^{n+1}}\right)^{n+1-r} \leqslant \frac{C_{r,2}}{N^{\log_2 3-1}}.$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^{\infty} I_s < C_r \frac{2\pi}{N^{r+\log_2 3-1}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \frac{C}{N^{r+\log_2 3-1}} = o\left(\frac{1}{N^r}\right). \quad (4.93)$$

Совершенно аналогично рассматривается случай, когда $s < -1$. Действительно, при этом $(|s| \geqslant 2)$ $\frac{k}{(|s|2^{n+l}-k)} < \frac{1}{3}$ и т. д. Таким образом,

$$\sum_{s=-2}^{-\infty} I_s = o\left(\frac{1}{N^r}\right). \tag{4.94}$$

Осталось оценить I_{-1}:

$$I_{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r} \frac{F^{[n]}((k-2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(k\pi)} \cos\left(ku - 2^{n+1}x - \frac{r\pi}{2}\right) \right| du. \tag{4.95}$$

Здесь заменять модуль суммы на сумму модулей нельзя, так как $\omega(k) \approx 1$ при $k \approx 2^n$, где

$$\omega(k) = \frac{F^{[n]}((k-2^{n+1})\pi)}{F^{[n]}(k\pi)} = \frac{k^{n+1}}{(2^{n+1}-k)^{n+1}} \frac{\prod\limits_{j=n+2}^{\infty} \frac{\sin(k\pi - 2^{n+1}\pi)2^{-j}}{(k\pi - 2^{n+1}\pi)2^{-j}}}{\prod\limits_{j=n+2}^{\infty} \frac{\sin(k\pi 2^{-j})}{k\pi 2^{-j}}}. \tag{4.96}$$

Обозначим далее для краткости

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{\prod\limits_{j=n+2}^{\infty} \frac{\sin(k\pi - 2^{n+1}\pi)2^{-j}}{(k\pi - 2^{n+1}\pi)2^{-j}}}{\prod\limits_{j=n+2}^{\infty} \frac{\sin(k\pi 2^{-j})}{k\pi 2^{-j}}}.$$

Для $1 \leqslant k \leqslant m < 2^n$

$$0 < C_1 < \alpha_k^{(n)} < C_2, \tag{4.97}$$

где C_1, C_2 не зависят от n. Более того,

$$\alpha_k^{(n)} = \alpha\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right), \tag{4.98}$$

где

$$\alpha(x) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(x-\pi)2^{-j}}{(x-\pi)2^{-j}}}{\prod\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\sin x 2^{-j}}{x 2^{-j}}} = \frac{F^{[0]}(x-\pi)}{F^{[0]}(x)}. \tag{4.99}$$

Имеем

$$I_{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k^{(m)}}{k^r} \frac{k^{n+1}}{(2^{n+1}-k)^{n+1}} \alpha_k^{(n)} \cos(ku-\alpha) \right| du; \quad (4.100)$$

обозначим для краткости $\alpha = 2^{n+1}x - \frac{r\pi}{2}$, следовательно,

$$I_{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2^{n+1}-k)^r} \alpha_k^{(n)} \lambda_k^{(m)} \left(\frac{k}{2^{n+1}-k} \right)^{n+1-r} \cos(ku-\alpha) \right| du.$$

Поэтому

$$I_{-1} < \frac{1}{2^{nr}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(n)} \lambda_k^{(m)} \left(\frac{k}{2^{n+1}-k} \right)^{n+1-r} \cos(ku-\alpha) \right| du = \frac{2^r}{N^r} I', \quad (4.101)$$

где

$$I' = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(n)} \lambda_k^{(m)} \left(\frac{k}{2^{n+1}-k} \right)^{n+1-r} \cos(ku-\alpha) \right| du. \quad (4.102)$$

В свою очередь,

$$I' \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(n)} \lambda_k^{(m)} \left(\frac{k}{2^{n+1}-k} \right)^{n+1-r} \cos ku \right| |\cos\alpha|\, du + \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(n)} \lambda_k^{(m)} \left(\frac{k}{2^{n+1}-k} \right)^{n+1-r} \sin ku \right| |\sin\alpha|\, du \leqslant I_{\sin} + I_{\cos}, \quad (4.103)$$

где

$$I_{\cos} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(n)} \lambda_k^{(m)} \left(\frac{k}{2^{n+1}-k} \right)^{n+1-r} \cos ku \right| du; \quad (4.104)$$

$$I_{\sin} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(n)} \lambda_k^{(m)} \left(\frac{k}{2^{n+1}-k} \right)^{n+1-r} \sin ku \right| du. \quad (4.105)$$

Лемма 1.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{k} \sin jx \right| dx < C_1 \ln k + C_2;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{k} \cos jx \right| dx < C_1 \ln k + C_2,$$

где C_1, C_2 не зависят от k.

Применим к сумме (4.104), (4.105) преобразование Абеля:

$$I_{\cos}=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{m-1}\left[-\alpha_{k+1}^{(n)}\lambda_{k+1}^{(m)}\left(\frac{k+1}{2^{n+1}-k-1}\right)^{n+1-r}+\right.\right.$$

$$\left.+\alpha_k^{(n)}\lambda_k^{(m)}\left(\frac{k}{2^{n+1}-k}\right)^{n+1-r}\right]\sum_{j=1}^{k}\cos ju+$$

$$\left.+\left(\frac{m}{2^{n+1}-m}\right)^{n+1-r}\lambda_m^{(m)}\alpha_m^{(n)}\sum_{j=1}^{m}\cos ju\right|du; \qquad (4.106)$$

$$I_{\sin}=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{m-1}\left[-\alpha_{k+1}^{(n)}\lambda_{k+1}^{(m)}\left(\frac{k+1}{2^{n+1}-k-1}\right)^{n+1-r}+\alpha_k^{(n)}\lambda_k^{(m)}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{k}{2^{n+1}-k}\right)^{n+1-r}\sum_{j=1}^{k}\sin ju+\left(\frac{m}{2^{n+1}-m}\right)^{n+1-r}\lambda_m^{(m)}\alpha_m^{(n)}\sum_{j=1}^{m}\sin ju\right|du. \qquad (4.107)$$

Отсюда

$$I_{\cos}\leqslant\left\{\max\left|\left(\frac{k+1}{2^{n+1}-k-1}\right)^{n+1-r}\alpha_{k+1}^{(n)}\lambda_{k+1}^{(m)}-\left(\frac{k}{2^{n+1}-k}\right)^{n+1-r}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\alpha_k^{(n)}\lambda_k^{(m)}\right|\times\sum_{k=1}^{m-1}(C_1\ln k+C_2)+C\left(\frac{m}{2^{n+1}-m}\right)^{n+1-r}(C_1\ln m+$$

$$+C_2]=A; \qquad (1.108)$$

$$I_{\sin}\leqslant A; \qquad (4.109)$$

$$I_{\cos,\sin}\leqslant m(C_1\ln m+C_2)\max_k\left|\left(\frac{k+1}{2^{n+1}-k-1}\right)^{n+1-r}\alpha_{k+1}^{(n)}\lambda_{k+1}^{(m)}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{k}{2^{n+1}-k}\right)^{n+1-r}\alpha_k^{(n)}\lambda_k^{(m)}\right|+C(C_1\ln m+C_2)\left(\frac{m}{2^{n+1}-m}\right)^{n+1-r}.$$

Выберем теперь m так, чтобы

$$C(C_1\ln m+C_2)\left(\frac{m}{2^{n+1}-m}\right)^{n+1-r}\to 0,\quad n\to\infty, \qquad (4.110)$$

и

$$\max_k\left|\left(\frac{k+1}{2^{n+1}-k-1}\right)^{n+1-r}\alpha_{k+1}^{(n)}\lambda_{k+1}^{(m)}-\left(\frac{k}{2^{n+1}-k}\right)^{n+1-r}\alpha_k^{(n)}\times\right.$$

$$\left.\times\lambda_k^{(m)}\right|\leqslant\frac{\gamma}{m(C_1\ln m+C_2)}, \qquad (4.111)$$

где $\gamma\to 0$ при $m\to\infty$. Положим $m=2^n-s$, $\dfrac{m}{2^{n+1}-m}=1-\dfrac{2s}{2^n+s}$. Выберем m так, чтобы

$$\left(\frac{m}{2^{n+1}-m}\right)^{n+1-r}\approx\frac{1}{n^3}. \qquad (4.112)$$

Тогда
$$(n+1-r)\ln\left(1-\frac{2s}{2^n+s}\right)\approx -3\ln n,\quad \ln\left(1-\frac{2s_1}{2^n+s_1}\right)=$$
$$=-\frac{3\ln n}{n+1-r}.$$
Найдя отсюда s_1, положим $m=2^n-[s_1]$. Тогда
$$\left(\frac{m}{2^{n+1}-m}\right)^{n+1-r}=\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{4.113}$$
Так как $\frac{3\ln n}{n+1}\to 0$ при $n\to\infty$, то $\frac{2s}{2^n+s}\to 0$ и, следовательно, $\Theta_n=\frac{s}{2^n}\to 0$. Поэтому
$$\frac{1}{N^p}-\frac{1}{m^p}=o\left(\frac{1}{N^p}\right).$$
Проверим выполнение (4.110). Из (4.112) следует
$$C(C_1\ln m+C_2)\left(\frac{m}{2^{n+1}-m}\right)^{n+1-r}=C(C_1\ln m+C_2)\left(\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
и, так как $\ln m<n$, то (4.110) выполнено.

Проверим выполнение (4.111). Заметим, что
$$\Delta_k=\left(\frac{k+1}{2^{n+1}-k-1}\right)^{n+1-r}\alpha_{k+1}^{(n)}\lambda_{k+1}^{(m)}-\left(\frac{k}{2^{n+1}-k}\right)^{n+1-r}\alpha_k^{(n)}\lambda_k^{(m)}=$$
$$=\varphi_{n,r}\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)\alpha\left(\frac{(k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)\lambda\left(\frac{k+1}{m}\right)-\varphi_{n,r}\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\times$$
$$\times\alpha\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)\lambda\left(\frac{k}{m+1}\right), \tag{4.114}$$
где
$$\varphi_{n,r}(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n+1-r}, \tag{4.115}$$
функция $\alpha(x)$ взята из (4.99), а $\lambda(x)$ — из (4.90). Положим $\alpha_1(x)=\alpha(\pi x)$, $\lambda_1(x)=\lambda\left(\frac{2^{n+1}}{m+1}x\right)$ и, наконец, $\beta(x)=\varphi_{n,r}(x)\,\alpha_1\times\times(x)\,\lambda_1(x)$. Необходимо оценить величину
$$\Delta_k=\beta\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)-\beta\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right).$$
По теореме Лагранжа
$$|\Delta_k|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}\max_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}|\beta'(x)|. \tag{4.116}$$
Остается проверить, что
$$\max_{x\in[0,1]}|\beta'(x)|\leqslant\frac{C}{\ln^2 m}. \tag{4.117}$$

Тогда

$\max|\Delta_k|\, m\,(C\ln n + C_2) \to 0$, что и требовалось доказать.

Проверим (4.117). Поскольку $|\alpha_1'(x)| \leqslant C$ и $|\lambda_1'(x)| \leqslant C$ при $0 < x < \frac{1}{2}$, то остается проверить, что

$$|\varphi_{n,r}(x)| \leqslant \frac{C}{n^r}; \quad |\varphi_{n,r}'(x)| \leqslant \frac{C}{n^r} < \frac{C}{\ln^r m}.$$

Таким образом, для четных n, r доказана

Теорема. $\forall f \in \tilde{C}^r[-\pi, \pi]$

$$\inf_{\varphi\in \widetilde{UP}_n} \|f-\varphi\|_C \leqslant \frac{K_r + \alpha_r(n)}{N^r}\|f^{(r)}\|_C,$$

где $n = \log_2 N$, $\alpha_r(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Для n нечетного рассуждения проводятся аналогично, с соответствующими изменениями в построении функции $v_l(x)$; вместо (4.90) для нечетного r нужно использовать

$$\lambda_k^{(m)} = 1 - k^r \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{[2\nu(n+1)-k]^r} - \frac{1}{[2\nu(n+1)+k]^r}\right\}. \quad (4.118)$$

Доказательство леммы. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{ix} - 1 - e^{i(n+1)x} + e^{inx}}{2(1-\cos x)},$$

то

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) =$$

$$= \frac{\cos x - 1 - \cos(n+1)x + \cos nx}{2(1-\cos x)} = \frac{\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}; \quad (4.119)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) = \frac{\sin x - \sin(n+1)x - \sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}. \quad (4.120)$$

Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|dx = 2\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|dx =$$

$$= 2\left\{\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\frac{\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right|dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right|dx \leqslant\right.$$

$$\leqslant\left\{C_1\frac{n}{2}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\cos\frac{n+1}{2}x\right|dx + C_2\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dx}{x}\right\} \leqslant C_3 + C_4\ln n, \quad (4.121)$$

что и требовалось доказать. Здесь учтено, что $\sin\frac{n}{2}x < \frac{n}{2}x$ при $x > 0$; $\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$ при $x \in [0, \pi]$. Совершенно аналогично оценивается равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right|dx.$$

Отметим, что метод доказательства этой теоремы позволяет оценить величину $\alpha_r(n)$ сверху.

§ 9. ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ СДВИГОВ ФУНКЦИИ $\mathrm{up}(x)$

Оценим погрешности интерполяции функций из $\tilde{C}[-\pi, \pi]$ элементами $\mathrm{U\tilde{P}}_n$ в точках равномерной сетки. Приведем некоторые вспомогательные сведения.

1. Пусть $A = [a_{ij}]$ — квадратная матрица порядка N. Она называется циркулянтом порядка N, если для всех i, $j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ $a_{i+1,\, j+1} = a_{i,\, j}$. Как известно [1], собственные числа матрицы A имеют вид

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{N} a_{1,k+1}\exp(2\pi ijkN^{-1}), \quad (4.122)$$

а собственные векторы —

$$\omega_j = \left[1,\ \exp(2\pi ijN^{-1}),\ \ldots,\ \exp(2\pi ijkN^{-1}),\ \ldots,\ \exp\left(2\pi ij\frac{N-1}{N}\right)\right],$$

причем

$$(\omega_j, \omega_l) = \sum_{k=0}^{N-1}\exp(2\pi i(j-l)kN^{-1}) = \begin{cases}0, & j \neq l,\\ N, & j = l.\end{cases} \quad (4.123)$$

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j\omega_j$; $\varepsilon = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N]$; $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_N]$. *Тогда*

$$\alpha = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\varepsilon_l\omega_l^*,$$

*где * означает комплексное сопряжение.*

Доказательство. Из второго равенства следует

$$\alpha_j = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \varepsilon_l \exp(-2\pi i l N^{-1}).$$

Подставим в первое равенство полученное выражение с учетом (4.123), тогда

$$\varepsilon_m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \varepsilon_l \exp(-2\pi i l j N^{-1} + 2\pi i j m N^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \varepsilon_l \sum_{j=1}^{N} \exp(2\pi i j (m-l) N^{-1}) = \varepsilon_m.$$

Справедливость леммы следует из линейной независимости векторов ω_l.

Следствие. $|\alpha_j| \leqslant \max_l |\varepsilon_l|$. Действительно,

$$|\alpha_j| = \frac{1}{N} \left| \sum_{l=1}^{N} \varepsilon_l \exp(-2\pi i l j N^{-1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} |\varepsilon_l| \leqslant \frac{N}{N} \max_l |\varepsilon_l| = \max_l |\varepsilon_l|.$$

2. Пусть $f(x) \in \tilde{C}^2[-\pi, \pi]$, а

$$V_n(f) = (S_{n+1} + \cdots + S_{2n})/n =$$

$$= \sum_{|k| \leqslant n} a_k e^{ikx} + \sum_{|k|=n+1}^{2n} a_k \left(1 - \frac{|k| - n}{n}\right) e^{ikx}$$

есть сумма Валле — Пуссена для $f(x)$ [30], где

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \mathrm{dt}.$$

Тогда

$$\| f(x) - V_n(x) \|_{C[-\pi,\pi]} \leqslant \frac{C}{n^2} \| f'' \|_{C[-\pi,\pi]}.$$

Пусть теперь $\tilde{\mathrm{UP}}_n$ — пространство функций $\varphi(x)$ на окружности $S^1 = \{w = e^{ix}\}$, порожденных сдвигами функции $F\,\mathrm{up}_n\left(\frac{x}{\pi}\right)$, введенное в § 8 этой главы. Исследуем интерполяцию $f(x) \in C(S^1)$ элементами $\tilde{\mathrm{UP}}_n$ в точках вида $x_l = l2^{-n}\pi$ или $x_l = (2l+1)\,2^{-n-1}\pi$ в зависимости от четности n. Другими словами, найдем функцию $\varphi(x) \in \tilde{\mathrm{UP}}_n$ такую, что $\varphi(l2^{-n}\pi) = f(l2^{-n}\pi)$, или

$$\varphi((2l+1)\,2^{-n-1}\pi) = f((2l+1)\,2^{-n-1}\pi) \qquad (4.124)$$

для всех $l \in \mathbb{Z}$ и оценим $\| \varphi(x) - f(x) \|_C$. В пространстве $\widetilde{\mathrm{UP}}_n$ есть следующий базис (4.71), (4.72):

$$\psi_i^{(n)}(x) = F\,\mathrm{up}_n\left(\frac{x}{\pi} - i2^{-n} + 1\right) \text{ для } n \text{ четного}, \quad i = 1, \ldots, 2^{n+1};$$

$$\psi_i^{(n)} \quad F\,\mathrm{up}_n\left(\frac{x}{\pi} - i2^{-n} + 2^{-n-1} + 1\right) \text{ для } n \text{ нечетного.}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, интерполирующая $f(x)$, имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{l=1}^{2^{n+1}} c_l \psi_l^{(n)}(x).$$

Тогда должно выполняться равенство

$$f(x_m) = \sum_{l=1}^{2^{n+1}} c_l \psi_l^{(n)}(x_m) \qquad (4.125)$$

для $m = 1, \ldots, 2^{n+1}$. Нетрудно заметить, что матрица системы (4.125) — циркулянт порядка 2^{n+1}. Ее собственные числа для $x_m = (m-1)\,2^{-n}\pi$ и четного n имеют вид

$$\lambda_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} F\,\mathrm{up}_n(1 - k2^{-n}) \exp(i2\pi jk2^{-n-1}).$$

Для $x_l = (l-1)\,2^{-n}\pi$ при n нечетном $\lambda_{2^n} = 0$, так как при этом

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} (-1)^k F\,\mathrm{up}_n(1 - k2^{-n} + 2^{-n-1}) = 0.$$

Поэтому для $n = 2s + 1$ интерполяцию следует проводить в точках $(2l-1)\,2^{-n-1}$. Тогда собственные числа матрицы системы (4.125) имеют вид

$$\lambda_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} F\,\mathrm{up}_n(1 - k2^{-n}) \exp(2\pi ijk2^{-n-1}).$$

Рассмотрим теперь случай, когда n четное. Обозначим

$$F^{[n]}(t) = \left(\frac{\sin t2^{-n-1}}{t2^{-n-1}}\right)^{n+1} \prod_{k=2}^{\infty} \frac{\sin t2^{-n-k}}{t2^{-n-k}}. \qquad (4.126)$$

Тогда

$$F\,\mathrm{up}_n(1 - k2^{-n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it(1 - k2^{-n}))\, F^{[n]}(t)\, dt.$$

Таким образом,

$$\lambda_j^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it(1 - k2^{-n}))\, F^{[n]}(t)\, \mathrm{dt}. \qquad (4.127)$$

Заметим, что $\exp(it(1-k2^{-n}))$ имеет период $2\pi 2^n$. Положим

$$\tilde{G}_n(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F^{[n]}(t-k2^{n+1}\pi). \qquad (4.128)$$

Легко видеть, что функция $\tilde{G}_n(t)$ четная и имеет период $2^{n+1}\pi$.

Лемма 2. $\tilde{G}_n(t)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Следствие.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(it(1-k2^{-n}))F^{[n]}(t)\,\mathrm{dt}=\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi}\tilde{G}_n(t)\exp(it(1-k2^{-n}))\,\mathrm{dt}.$$

Ввиду того, что $\operatorname{supp}F\,\mathrm{up}_n(x)\subset[-1,\ 1]$ и $F\,\mathrm{up}_n(x)$ — четная функция, можно считать, что

$$\lambda_j^{(n)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\,\mathrm{up}_n(k2^{-n})\exp(2\pi ij2k^{-n-1})\exp(\pi ij).$$

Следовательно,

$$\lambda_j^{(n)}=2^n\exp(\pi ij)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi 2^n}\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi}\tilde{G}_n(t)\exp(-itk2^{-n})\,dt\exp(\pi ijk2^{-n}).$$

Но

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi 2^n}\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi}\tilde{G}_n(t)\exp(-itk2^{-n})\,\mathrm{dt}\exp(ixk2^{-n})=\tilde{C}_n(x).$$

Поэтому $\lambda_j^{(n)}=2^n\exp(\pi ij)\tilde{C}_n(\pi j)$, $j=1,\ \dots,\ 2^{n+1}$.

Лемма 3. $\tilde{G}_n\times(t)>C\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}>0$.

Следствие. $|\lambda_j^{(n)}|>C\left(\frac{4}{\pi}\right)^{n+1}>0$. Следовательно, интерполирующая функция $\varphi(x)$ для любой $f(x)$ существует и единственна.

Теорема 1. *Если* $|f(k2^{-n})|<\varepsilon$, *то* $\|\varphi(x)_C\|\leqslant(C_1\ln n+C_2)\varepsilon$, *где* C_i не зависят от n.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$|\varphi(k2^{-n}+h)|<(C_1\ln n+C_2)\varepsilon$$

для $0<h<2^{-n}$ и всех k. При $x=k2^{-n}+h$

$$\varphi(k2^{-n}+h)=\sum_{l=1}^{2^{n+1}}c_l\psi_l^{(n)}(k2^{-n}+h). \qquad (4.129)$$

Пусть A^h — матрица системы (4.129). Легко видеть, что она циркулянт. Аналогично предыдущему получаем следующее выражение для ее собственных чисел λ_j^h:

$$\lambda_j^h=2^n\exp(\pi ij)\tilde{G}_n^h(-\pi j),\qquad j=1,\ \dots,\ 2^{n+1},$$

где

$$\tilde{G}_n^h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F^{[n]}(t - 2\pi k 2^n) \exp(i(t - 2^{n+1}\pi k) h). \quad (4.130)$$

Пусть $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2^{n+1}}]$, где $\varepsilon_k = f((k-1)2^{-n}$; $\bar{\varepsilon} = \sum_{m=1}^{2^{n+1}} b_m\omega_m$, где ω_m — собственные векторы циркулянта порядка 2^{n+1}; $\bar{c} = [c_1, \ldots, c_{2^{n+1}}]$ (см. (4.125)) и $\bar{\varphi}^h = [\varphi(h), \ldots, \varphi(2 - 2^{-n} + h)] = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^{n+1}}]$. Тогда

$$\bar{c} = \sum_{m=1}^{2^{n+1}} \frac{b_m}{\lambda_m^{(n)}}\omega_m; \quad \bar{\varphi}^h = \sum_{m=1}^{2^{n+1}} \frac{\lambda_m^h}{\lambda_m^{(n)}} b_m\omega_m,$$

поскольку матрицы A_n и A^h имеют как циркулянты общие собственные векторы. Таким образом,

$$\varphi_j = \sum_{m=1}^{2^{n+1}} \frac{\lambda_m^h}{\lambda_m^{(n)}} b_m \exp(\pi i m j 2^{-n}). \quad (4.131)$$

С другой стороны,

$$\varepsilon_k = \sum_{m=1}^{2^{n+1}} b_m \exp(\pi i m k 2^{-n}).$$

Удобно считать, что индексы k, m, l, j и т. д. принадлежат $\mathbb{Z}/2^{n+1}\mathbb{Z}$. Тогда

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{s+j} = \sum_{m=1}^{2^{n+1}} b_m \exp(\pi i m j 2^{-n}) \exp(\pi i m s 2^{-n}),$$

где $s = k - j$. Рассмотрим

$$\sigma = \sum_{s=-2^n+1}^{2^n} a_s\varepsilon_{j+s} = \sum_{m=1}^{2^{n+1}} b_m \left(\sum_{s=-2^n+1}^{2^n} a_s \exp(\pi i m s 2^{-n})\right) \times$$
$$\times \exp(\pi i m j 2^{-n}). \quad (4.132)$$

Найдем a_s такие, что

$$\sum_{s=-2^n+1}^{2^n} |a_s| \leqslant C_1 \ln n + C_2;$$

$$\left| \frac{\lambda_m^h}{\lambda_m^{(n)}} - \sum_{s=-2^n+1}^{2^n} a_s \exp(is\pi m 2^{-n}) \right| \leqslant C 2^{-n-1}$$

для всех m. Тогда

$$|\sigma| < (C_1 \ln n + C_2)\,\varepsilon; \quad |\varphi_j - \sigma| < \max|b_m| \frac{C}{2^{n+1}} 2^{n+1} < C\varepsilon$$

(в силу леммы 1) и, следовательно, $|\varphi_l| < (C_1 \ln n + C_2)\,\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Функция* $\tilde{G}_n^h(t) \in C^\infty$ — *периодическая с периодом* $2^{n+1}\pi$.

Положим

$$\tilde{\Phi}_h(x) = \frac{\tilde{G}_n^h(-x)}{\tilde{G}_n(x)}, \quad \Phi(x) = \tilde{\Phi}_h(2^n x),$$

где функция $\Phi(x)$ — 2π-периодическая и $\Phi(x) \in \tilde{C}^\infty$. Тогда $\frac{\lambda_m^h}{\lambda_m^{(n)}} = \Phi(\pi m 2^{-n})$. Задача состоит в том, чтобы приблизить $\frac{\lambda_m^h}{\lambda_m^{(n)}}$ выражением

$$\sum_{s=-2^n+1}^{2^n} a_s \exp(is\pi m 2^{-n}).$$

Положим

$$\sigma(x) = \sum_{s=-2^n}^{2^n} a_s e^{isx}.$$

Это — тригонометрический полином степени 2^n. Аппроксимируем $\Phi(x)$ тригонометрическим полиномом $\sigma(x)$ в равномерной метрике.

Лемма 5. $\|\Phi'(x)\|_C < Cn$, $\|\Phi''(x)\|_C < Cn^2$.

Лемма 6. $\Phi(x) = e^{ixh2^n} + \psi(x)$, где $\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x)|\,dx < \frac{C}{n}$.

Лемма 7. $\|\Phi''(x)\|_{L_1(-\pi,\pi)} \leqslant Cn$.

Пусть $\sigma(x)$ — сумма Валле — Пуссена $V_{2^{n-1}-1}$ для $\Phi(x)$. Тогда согласно лемме 5

$$\|\Phi(x) - \sigma(x)\|_C < \frac{Cn^2}{2^{2n}} < \frac{C}{2^{n+1}}.$$

Из леммы 6 следует $|a_k| < \frac{C}{k} + \frac{C}{n}$, $\quad k \neq 0$, $|a_0| < C$, а из леммы 7 — $|a_k| < \frac{Cn}{k^2}$. Поэтому

$$\sum_{s=-2^n+1}^{2^n} |a_s| = \sum_{|s|<n} |a_s| + \sum_{n \leqslant |s| \leqslant 2^n} |a_s| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + Cn\frac{1}{n} + C \sum_{k=n}^{2^n} \frac{n}{k^2} < C_1 \ln n + C_2.$$

Таким образом, теорема 1 доказана. Из теоремы § 8 и теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi(x) \in \bar{\mathrm{U}}\mathrm{P}_n$, $N = 2^{n+1} = \dim \bar{\mathrm{U}}\mathrm{P}_n$, *интерполирует функцию* $f(x) \in \tilde{W}^r$ *в точках* x_j. *Тогда*

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_C \leqslant C_r \frac{\ln \ln N}{N^r} \tag{4.133}$$

при $N \geqslant 4$.

Заметим, что при интерполяции тригонометрическими полиномами $t(x)$ степени N оценка хуже [30]:

$$\|f(x) - t(x)\| < \frac{C \ln N}{N^r}.$$

Доказательства лемм 2—7. Леммы 2 и 4 следуют из того, что $|F^{[n]}(t)| < \frac{C_p}{t^p}$ для любого натурального p. Поскольку $\tilde{G}_n(t)$ — четная функция, рассмотрим $0 \leqslant t \leqslant \pi 2^n$. При этом $F^{[n]}(t)$ убывает от 1 до $C\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}$, а $|F^{[n]}(t - 2\pi 2^n)|$ не превосходит $C\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{n+1}$ и

$$F^{[n]}(t + 2\pi 2^n) > 0, \quad |F^{[n]}(t - 2k\pi 2^n)| < \left(\frac{2}{(2k-1)\pi}\right)^{n+1}, \qquad |k| > 2.$$

Отсюда

$$\tilde{G}_n(t) > C\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1} - 2C \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi}\right)^{n+1} - C\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{n+1} > $$
$$> C\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}.$$

Таким образом, лемма 3 доказана.

Лемма 5 доказывается непосредственным дифференцированием $F(t)$.

Для доказательства леммы 6 рассмотрим равенство

$$\mu(x) = \Phi(x) e^{-ixh2^n} - 1 = \psi(x) e^{-ixh2^n}.$$

Нетрудно заметить, что

$$|\mu(x)| \leqslant C_1 \left|\frac{x}{\pi}\right|^{n+1} + \frac{C_2}{n+1},$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mu(x)| \, dx \leqslant \frac{C}{n+1}.$$

Доказательство леммы 7 проводится непосредственным вычислением $\Phi''(x)$. Соответствующие выкладки, однако, слишком громоздки, поэтому они здесь не приводятся.

Представляет интерес вопрос о том, точен ли порядок оценки теоремы 1. Положительный ответ на этот вопрос можно получить из доказательства теоремы.

§ 10. ЕСТЕСТВЕННЫЙ ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ СДВИГОВ ФУНКЦИИ up(x)

Пусть UP_n^* — пространство функций вида

$$\varphi(x)=\sum_k c_k \,\mathrm{up}\,(x-k2^{-n}), \tag{4.134}$$

таких, что $\varphi^{(i)}(1)=\varphi^{(i)}(-1)$, $i\in\mathbb{N}$. Легко установить, что $\dim \mathrm{UP}_n^*=2^{n+1}$ и $\mathrm{UP}_n^*\subset \mathrm{UP}_{n+1}^*$.

В пространстве UP_n^* есть базис, состоящий из сдвигов функции $F\,\mathrm{up}_n(x)$ (см. (3.112), (3.113)). Поскольку матрица Грама этого базиса — циркулянт, его легко ортогонализировать, как это сделано в § 8 для пространства $\widetilde{\mathrm{UP}}_n$ (см. (4.76)), а именно: функции

$$\omega_j^{(n)}(y)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^{sn}F^{[n]}((j+s2^{n+1})\pi)\exp(i(j+s2^{n+1})\pi y),$$
$$j=1,\ \ldots,\ 2^{n+1}, \tag{4.135}$$

образуют ортогональный базис в UP_n^*. Элементы этого базиса инвариантны относительно сдвигов на $k2^{-n}$. Однако его недостаток заключается в том, что $\omega_{j_1}^{(n)}(x)\neq\omega_{j_2}^{(m)}(x)$ при $n\neq m$, $j_1\neq 2^{n+1}$, $j_2\neq 2^{m+1}$, т. е. при изменении n все $\omega_j^{(n)}$ изменяются (кроме $\omega_{2^{n+1}}^{(n)}\equiv 1$).

Задача состоит в построении такого ортогонального базиса в $L_2[-1,1]$, чтобы функции $\psi_1,\ldots,\psi_{2^{n+1}}$ составляли базис пространства UP_n^* для всех $n\in N$. Заметим, что функция $\omega_m^{(n+1)}(x)$ ортогональна функции $\omega_j^{(n)}(x)$, если $j\neq m$ и $j+2^{n+1}\neq m$. Для каждого $j=1,\ldots,2^{n+1}$ существует единственная с точностью до постоянного множителя функция $\tilde\psi_j^{(n)}$ такая, что

$$\tilde\psi_j^{(n)}(x)=\alpha_j^{(n)}\omega_j^{(n+1)}(x)+\beta_j^{(n)}\omega_{j+2^{n+1}}^{(n+1)}(x),\quad (\tilde\psi_j^{(n)},\ \omega_j^{(n)})_{L_2[-1,1]}=0.$$

Действительно,

$$(\tilde\psi_j^{(n)},\ \omega_j^{(n)})_{L_2[-1,1]}=2\alpha_j^{(n)}R_{j,1}^{(n)}-2\beta_j^{(n)}R_{j,2}^{(n)},$$

где

$$R_{j,1}^{(n)}=\sum_{s=-\infty}^{\infty}F^{[n]}((j+2^{n+2}s)\pi)\,F^{[n+1]}((j+2^{n+2}s)\pi);$$
$$R_{j,2}^{(n)}=\sum_{s=-\infty}^{\infty}F^{[n]}((j+2^{n+1}(2s+1))\pi)\,F^{[n+1]}((j+(2s+1)2^{n+1})\pi). \tag{4.136}$$

Хотя бы одна из величин $R_{j,1}^{(n)}$, $R_{j,2}^{(n)}$ не должна равняться 0, так как иначе пространство UP_{n+1}^* будет иметь размерность больше 2^{n+2}.

Положим

$$\tilde\psi_j^{(n)}=R_{j,2}^{(n)}\omega_j^{(n+1)}-R_{j,1}^{(n)}\omega_{j+2^{n+1}}^{(n+1)}. \tag{4.137}$$

Пусть для $2^{n+1} < k \leqslant 2^{n+2}$, $n \in N$,

$$\psi_k(x) = \tilde{\psi}^{(n)}_{k-2^{n+1}}(x), \tag{4.138}$$

$$\psi_1(x) = 1, \quad \psi_2(x) = \mathrm{up}(x) - \mathrm{up}(x-1) - \mathrm{up}(x+1). \tag{4.139}$$

Тогда $\{\psi_k\}$ — требуемый ортогональный базис в $L_2[-1, 1]$. Легко видеть, что при $k > 2^{n+1}$ функция ψ_k инвариантна относительно сдвигов на $s2^{-n}$.

Введем обозначение

$$\overline{\psi}_k(x) = \frac{\psi_k(x)}{\|\psi_k(x)\|_{L_2[-1,1]}}. \tag{4.140}$$

Последовательность $\{\overline{\psi}_k\}$ — ортонормированный базис в $L_2[-1, 1]$. Пусть

$$L_n(x) = \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=1}^{n} \overline{\psi}_k(t)\overline{\psi}_k(x) \right| \mathrm{dt} \tag{4.141}$$

— функция Лебега системы (4.140). Большой интерес представляет поведение $\| L_n(x) \|_{C[-1,1]}$ при $n \to \infty$. Однако рассмотреть этот вопрос в настоящей работе не представляется возможным.

§ 11. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СТРУКТУР И АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Остановимся кратко на вопросе об аппроксимационных свойствах структур, введенных в гл. 2. Рассмотрим однородную эллиптическую краевую задачу

$$Au = f \text{ в } \Omega \subset \mathbb{R}^l, \qquad B_i u = 0 \text{ в } \partial\Omega, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{4.142}$$

где A — эллиптический линейный дифференциальный оператор порядка $2m$, граница $\partial\Omega$ ограниченной области Ω для простоты рассуждений пусть будет класса C^∞. Тогда при выполнении некоторых условий [84], накладываемых на граничные операторы B_i, и из того, что $f \in C^l(\mathrm{Cl}\,\Omega)$, следует, что $u \in C^{l+2m}(\mathrm{Cl}\,\Omega)$ и при этом

$$\| u \|_{C^{l+2m}(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \leqslant C \| f \|_{C^l(\mathrm{Cl}\,\Omega)}. \tag{4.143}$$

Приближенное решение $\tilde{u}$ в структурном методе ищем в виде (см. гл. 2)

$$\tilde{u} = W(\Phi, \Psi_1, \ldots, \Psi_m), \tag{4.144}$$

где $\Phi \in L_0 \subset C(\mathrm{Cl}\,\Omega)$, $\Psi_k \in L_k \subset C(\mathrm{Cl}\,\Omega)$, $k = 1, \ldots, m$, и $\dim L_k = l_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Для однородных граничных условий функции вида (4.144) образуют линейное пространство $L(W) \subset C(\mathrm{Cl}\,\Omega)$, причем

$$N = \dim L(W) \leqslant \sum_{k=0}^{m} l_k.$$

При этом любая функция $v \in L(W)$ удовлетворяет краевым условиям задачи (4.142).

Замечание. С помощью R-функций неоднородные краевые условия легко сводятся к однородным, так что при рассмотрении задачи (4.142) общность не теряется. Впрочем, аналогично можно было бы рассмотреть и неоднородные краевые условия. Тогда множество $L(W)$ было бы линейным многообразием. Из теории приближений известно, что для любого линейного подпространства L_N размерности N

$$\sup_{u \in W^l A(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \inf_{\varphi \in L_N} \|u - \varphi\|_{C(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \geqslant \frac{C_l^1 A}{N^{l/t}},$$

где $W^l A(\mathrm{Cl}\,\Omega) = \{u \in C^l(\mathrm{Cl}\,\Omega), \|u\|_{C^l(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \leqslant A\}$, и существуют такие L_N, что

$$\sup_{u \in W^l A(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \inf_{\varphi \in L_N} \|u - \varphi\|_{C(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \leqslant \frac{C_l^2 A}{N^{l/t}};$$

здесь константы C_l^1, C_l^2 зависят от Ω.

Поскольку неравенство (4.143) дает для неизвестного решения u лишь оценку

$$\|u\|_{C^{l+2m}(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \leqslant A = C\|f\|_{C^l(\mathrm{Cl}\,\Omega)},$$

можно считать, что структура (4.144) оптимальна (по порядку) с точки зрения теории приближений, если

$$\sup_{u \in W^{l+2m} A(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \inf_{\varphi \in L(W)} \|u - \varphi\|_{C(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \leqslant \frac{CA}{N^{(l+2m)t^{-1}}}.$$

Для структур общего вида оценки аппроксимационных свойств получены в работах [23—25 и др.]. В то же время, оптимальность (в указанном выше смысле) для структур общего вида до сих пор не доказана. Однако, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным в работах [23, 24], и результаты И. Ю. Харрик [77, 78], можно показать, что структуры специального вида (которые могут быть построены для любых краевых условий) «с пограничной зоной» (см. § 7 гл. 2) и структуры разностного типа (см. § 3 гл. 3) оптимальны с точки зрения теории приближений. Поясним, что значит «структура с пограничной зоной» для случая, когда $m = 1$. Пусть $h(x) \in C^{l+2}(\mathrm{Cl}\,\Omega)$ и при этом $h(x) = 1$ на $\partial\Omega$; $0 \leqslant h \leqslant 1$ при $\rho(x, \partial\Omega) \leqslant CN^{-\frac{1}{t}}$, $h(x) = 0$ при $\rho(x, \partial\Omega) > CN^{-\frac{1}{t}}$; $\|h(x)\|_{C^s(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \leqslant CN^{\frac{s}{t}}$, $0 \leqslant s \leqslant l + 2$. Пусть порядок краевого условия $B_1 u = 0$ равен α_1, тогда структура вида

$$W = \Phi + \frac{\omega^{\alpha_1}}{\alpha_i!} h(x)(-B_1\Phi + \omega\Psi)$$

оптимальна при условии, что L_0 и L_1 оптимальны, т. е. если

$$\sup_{u \in W^{l+2} A(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \inf_{\varphi \in L_0} \|u - \varphi\|_{C(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \leqslant \frac{CA}{(l_0)^{(l+2)/t}};$$

$$\sup_{u \in W^{l+2-\alpha_1} A(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \inf_{\varphi \in L_1} \|u - \varphi\|_{C(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \leqslant \frac{CA}{(l_1)^{(l+2-\alpha_1)/t}}$$

и $l_0 = \beta l_1$, где $\beta > 0$ от N не зависит.

Отметим, что методика, изложенная в гл. 1 и 2, позволяет легко построить $h(x)$ с требуемыми свойствами. В качестве пространств L_k можно брать пространства алгебраических полиномов, сплайнов и атомарных функций. На практике часто используют (без теоретического обоснования) структуры, у которых $l_0 = N$, $l_k = 0$ при $k > 0$. Используя в качестве L_k при $k > 0$ специально выбранные (граничные) пространства сплайнов или атомарных функций, можно доказать аппроксимационную оптимальность структур, у которых

$$\lim_{N\to\infty} \frac{l_0}{N} = 1, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{l_k}{N} = 0 \text{ для } k > 0$$

(точнее $l_k = 0\,(N^{\frac{t-1}{t}}$ для $k > 0)$.

Выясним, что дает использование в качестве L_k пространств линейных комбинаций сдвигов атомарных функций, например функции

$$\mathrm{up}(t,\ x) = \mathrm{up}(x_1)\ \ldots\ \mathrm{up}(x_t).$$

Пусть $f \in C^l(\mathrm{Cl}\,\Omega)$, где l достаточно велико или неизвестно (например, в случае, когда краевая часть задана в отдельных точках), но есть основания полагать, что оно велико.

Как правило, априорная информация о том, каким должно быть N для получения заданной погрешности, отсутствует или дает слишком завышенное значение N. В большинстве случаев поступают следующим образом: решают задачу для небольшого N и по найденному первому приближению оценивают погрешность. Обычно эта оценка с достаточной степенью достоверности дает истинный порядок погрешности, а ее грубую оценку можно получить с помощью выражения (4.143). Если погрешность слишком велика, N увеличивают.

Использовать в качестве аппарата приближения сплайны степени l при больших l для нахождения первого приближения (т. е. при малых N) нецелесообразно — матрица системы будет иметь слишком много ненулевых элементов.

Использование же последовательностей пространств, построенных на основе атомарных функций, позволяет получать при малых и больших N относительно разреженную матрицу в сочетании с аппроксимационной оптимальностью полученных структур. Конечно, можно поступать так: для малых N брать сплайны малой степени, для больших N — большой. Однако тогда появятся дополнительные трудности при использовании начального приближения для нахождения следующего, поскольку пространства сплайнов более высокой степени не содержат сплайнов меньшей степени. А при использовании итерационных методов решения больших линейных алгебраических систем с разреженной матрицей (для таких систем итерационные методы получили широкое распространение [33]) наличие хорошего начального приближения весьма полезно [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972. 316 с.
2. *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии. М., «Наука», 1968. 912 с.
3. *Арнольд В. И.* Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений.— Функцион. анализ, 1970, 4, № 3, с. 1—9.
4. *Арнольд В. И.* О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных.— Мат. просвещение, 1958, № 3, с. 41—61.
5. *Бабич В. М.* К вопросу о распространении функций.— Успехи мат. наук., 1953, 8, вып. 2 (54), с. 111—113.
6. *Байрамов Р. А.* Об одной серии предполных классов в k-значной логике.— Кибернетика, 1967, № 1, с. 7—9.
7. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., «Мир», 1974. 126 с.
8. *Ганжела Н. Ф., Рвачев В. Л.* Об одном методе сведения краевых задач математической физики к задаче математического программирования.— Дифференц. уравнения, 1973, № 12, с. 2202—2206.
9. *Глушков В. М.* Введение в кибернетику. К., «Наук. думка», 1964. 324 с.
10. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. М., «Наука», 1973. 440 с.
11. *Гончарюк И. В., Рвачев В. Л.* Жесткость кручения стержней полигонального профиля.— Прикл. механика, 1967, № 4, с. 77—84.
12. *Гончарюк И. В., Рвачев В. Л., Шкляров Л. И.* Кручение стержней многоугольного профиля с учетом особенностей функции напряжения.— Прикл. механика, 1968, № 8, с. 101—108.
13. *Деклу Ж.* Метод конечных элементов. М., «Мир», 1976. 95 с.
14. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., «Наука», 1977. 453 с.
15. *Дзядык В. К.* О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике Z_p.— Мат. сборник, 1956, 40 (82), № 2, с. 239—242.
16. *Дорохов В. А., Дикий Л. И., Шкляров Л. И.* Алгоритм и стандартная программа построения уравнения поверхностей для многогранных областей.— Респ. фонд алгоритмов и программ, мат. обеспечение автоматизир. систем проектирования электро- и радиотехн. устройств, 1972, вып. 5, с. 220—229.
17. *Завьялов Ю. С.* О явном представлении интерполяционных сплайн-функций с равноотстоящими узлами.— Вычислит. системы, 1973, № 56, с. 3—17.
18. *Завьялов Ю. С.* Интерполирование кубическими многозвенниками.— Вычислит. системы, 1970, № 38, с. 23—73.
19. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1972. 708 с.

20. *Канторович Л. В.* Некоторые замечания о методе Ритца.— Труды Высшего инж.-технич. училища ВМФ, 1941, вып. 3, с. 3—16.
21. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М., «Наука», 1975. 183 с.
22. *Колмогоров А. Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных.— ДАН СССР, 1956, 108, № 2, с. 179—182.
23. *Колодяжный В. М., Рвачев В. А.* О приближении в равномерной метрике функций, удовлетворяющих граничному условию, функциями специального вида.— ДАН СССР, 1975, 222, № 6, с. 1276—1278.
24. *Колодяжный В. М., Рвачев В. А.* Структурное построение полных последовательностей координатных функций вариационного метода решения краевых задач. Препринт № 10 ИПМ АН УССР. Харьков, 1975. 75 с.
25. *Колодяжный В. М., Рвачев В. А.* О приближении функций, удовлетворяющих краевым условиям.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. К., 1976, с. 49—53.
26. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. М., «Наука», 1976. 320 с.
27. *Коровкин П. П.* Математический анализ. Ч. 1. М., «Просвещение», 1972. 448 с.
28. *Кукуджанов В. Н.* Численное решение неодномерных задач распространения волн напряжений в твердых телах. М., Вычислит. центр АН СССР, 1976. Сообщ. по прикл. математике, 1976, в. 6, 67 с.
29. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971. 371 с.
30. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М., «Мир», 1975. 496 с.
31. *Литвин О. М., Рвачов В. Л.* Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. К., «Наук. думка», 1973. 123 с.
32. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970. 939 с.
33. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. Новосибирск, «Наука», 1973. 352 с.
34. *Мартынюк А. А.* Техническая устойчивость в динамике. К., «Техніка», 1973. 188 с.
35. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., «Машиностроение», 1968. 532 с.
36. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Изд-во иностр. лит., 1957. 255 с.
37. *Михлин С. Г.* Некоторые вопросы сеточной аппроксимации и их приложения к вариационно-сеточному методу.— В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск, 1974, с. 5—14.
38. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957. 476 с.
39. *Никольский С. М.* Некоторые вопросы приближения функций полиномами.— В кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме. М., Физматгиз, 1961, с. 259—281.
40. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., «Наука», 1969. 480 с.
41. *Никольский С. М.* О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств.— Мат. сборник, 1956, 40 (82), № 2, с. 243—268.
42. *Подгорный А. Н.* Математические проблемы в машиностроении.— В кн.: Математизация знаний и научно-технический прогресс. К., 1975, с. 214—228.
43. *Рвачев В. Л.* Геометрические приложения алгебры логики. К., «Техніка», 1967. 212 с.
44. *Рвачев В. Л.* Об одном расширении понятия R-функций.— Кибернетика, 1971, № 4, с. 86—92.
45. *Рвачев В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике. К., «Наук. думка», 1974. 259 с.
46. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. К., «Наук. думка», 1976. 287 с.
47. *Рвачев В. Л.* Элементы дискретного анализа и теории R-функций. Харьков, Изд-во Харьк. политехн. ин-та, 1972. 169 с.

48. *Рвачев В. Л., Тоница В. С., Шкляров Л. И.* О замыкающих функциях трехзначной логики.— ДАН УССР. Сер. А, 1976, № 6, с. 498—501.
49. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. К., «Наук. думка», 1977. 235 с.
50. *Рвачев В. Л.* К вопросу о построении координатных последовательностей.— Дифференц. уравнения, 1970, № 6, с. 1034—1047.
51. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* Атомарные функции в математической физике.— В кн.: Математизация знаний и научно-технический прогресс. К., 1975, с. 188—199.
52. *Рвачов В. Л., Рвачов В. О.* Про одну фінітну функцію.— ДАН УРСР. Сер. А., 1971, с. 705—707.
53. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* О представлении многочленов финитными функциями.— Мат. физика, 1972. № 11, с. 126—129.
54. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* Функция up (x) в методе конечных элементов.— Мат. физика, 1975, № 17, с. 170—175.
55. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* О приближении функцией up (x).— ДАН УССР. Сер. А, 1973, с. 507—508.
56. *Рвачев В. А.* О приближении с помощью функции up (x).— ДАН СССР, 1977, 233, № 2, с. 295—296.
57. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* Применение функции up (x) для решения краевых задач в полупространстве.— Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1975, вып. 2, № 105, с. 3—5.
58. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* Бесконечно дифференцируемые уравнения замкнутых множеств.— Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1976, вып. 3, № 113, с. 3—5.
59. *Рвачев В. Л., Базилевич О. В.* О построении вариационно-разностных схем с помощью одной финитной функции.— ДАН УССР. Сер. А, 1973, № 5, с. 419—422.
60. *Рвачев В. А.* Применение функции up (x) в вариационно-разностных методах. Вып. 16, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975, 18 с.
61. *Рвачев В. А.* Представление экспоненциальных функций финитными.— ДАН УССР. Сер. А, 1973, № 9, с. 821—824.
62. *Рвачев В. А.* Представление сплайнов финитными функциями.— ДАН УССР. Сер. А, 1973, № 2, с. 123—126.
63. *Рвачев В. А.* Некоторые финитные функции и их применения.— Мат. физика, 1973, № 13, с. 139—149.
64. *Рвачов В. О.* Про функції $\Xi_n(x)$.— В кн.: Крайові задачі для областей складної форми. К., 1973, с. 42—44.
65. *Рвачев В. А.* Функция up (x) в конструктивной теории функций.— В кн.: Краевые задачи для областей сложной формы. К., 1972, с. 72—83.
66. *Рвачев В. А.* Один класс финитных функций и некоторые их применения. Канд. дисс. К., 1973. 132 с.
67. *Савелов А. А.* Плоские кривые. М., Физматгиз, 1960. 293 с.
68. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971. 552 с.
69. *Сироджа И. Б.* Алгоритмы распознавания геометрических образов.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 5, с. 136—144.
70. *Слесаренко А. П.* Дослідження температурних полів у конструктивних елементах складної форми залежно від теплофізичних параметрів.— Вісн. АН УРСР, 1976, № 12, с. 23—26.
71. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М., «Наука», 1976. 248 с.
72. *Стоян Ю. Г.* Размещение геометрических объектов. К., «Наук. думка», 1975. 239 с.
73. *Стоян Ю. Г., Гиль Н. И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. К., «Наук. думка», 1976. 247 с.
74. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М., Изд-во при Моск. ун-те, 1976. 304 с.
75. *Тоница В. С., Шкляров Л. И.* Об одном алгоритме автоматического построения аналитических образов сложных геометрических объектов.— В кн.: Вычислительная техника в машиностроении. Минск, 1974, с. 3—14.

76. *Федько В. В.* Обобщенная кусочно-непрерывная интерполяция Эрмита и решение краевых задач. Препринт № 10 ИПМ АН УССР. Харьков, 1976. 25 с.
77. *Харрик И. Ю.* О приближении функций, обращающихся на границе области в нуль вместе с частными производными, функциями особого вида.— Сиб. мат. журн., 1963, **4**, № 2, с. 408—425.
78. *Харрик И. Ю.* О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида.— Мат. сборник, 1955, **37** (79), № 2, с. 353—384.
79. *Шкляров Л. И., Тоница В. С.* Алгоритм аналитического описания областей, ограниченных конечным числом дуг окружностей и отрезков прямых.— В кн.: Комбинаторная геометрия и оптимальные размещения. К., 1972, с. 15—24.
80. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. М., «Наука», 1973. 238 с.
81. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Г.* Функции алгебры логики и классы Поста. М., «Наука», 1966. 119 с.
82. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике.— Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, № 51, с. 5—142.
83. *Яненко Н. Н., Квасов Б. И.* Итерационный метод построения полукубических сплайн-функций.— ДАН СССР, 1970, **195**, № 5, с. 1055—1057.
84. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I, II.— Com. Pure Appl. Math., 1959, **12**, № 4, p. 623—727; Math., 1964, **17**, N 1, p. 35—92.
85. *Gevrey M.* Les quasi fonctions de Green et les systemes d'equations aux derivees partielles du type elliptique.— Annales de l'Ecole Normale Superieure, 1935, N 52, p. 39—108.
86. *Giraud G.* Sur certains problemes non lineaires de Neumann et sur certains problemes non lineaires mixte.— Annales de l'Ecole Normale Superiecure, 1932, N 49, p. 1—104, 245—308.
87. *Hestenes M. R.* Extension of the range of differentiable function.— Duke Math. J., 1941, **8**, N 1, p. 183—192.
88. Lyche T., Schumaker L. L. Local spline approximation methods.— J. Approxim. Theory, 1975, N 15, p. 29—325.
89. *Schultz M. H.* Rayleigh — Ritz — Galerkin methods for multidimensional problems.— SIAM J. Numer. Anal., 1969, **6**, N 4, p. 523 — 538.
90. *Strang G., Fix G.* An analysis of the finite element method. N. Y., Prentice Hall, 1973. 306 p.
91. *Thom R.* Local topological properties of differentiable mappings.— In: Differential Analysis (Bombey Colloquium). Bombey, 1964, p. 191—202.
92. *Whitney H.* Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets.— Trans. Amer. Math. Soc., 1936, **36**, p. 63—89.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\forall$ — квантор общности (для всех)
$\exists$ — квантор существования (существует)
$\varnothing$ — пустое множество
$A \setminus B$ — разность множеств A и B
$\overline{A}$ — дополнение множества A или операция отрицания в алгебре логики (в зависимости от контекста)
$\mathrm{Cl}\, A$ — замыкание множества A
$\dim A$ — размерность множества A
2^A — совокупность всех подмножеств множества A
$A \times B$ — прямое произведение множеств A и B
A^n — n-я степень множества A
$\{x : Px\}$ — совокупность элементов, обладающих свойством Px
$f : A \to B$ — отображение множества A на множество B
$f(A)$ — образ множества A при отображении f
$f^{-1}(A)$ — прообраз множества A при отображении f
f / A — сужение (ограничение) отображения f на множество A
$\inf(\sup) A$ — нижняя (верхняя) грань множества $A \subset \mathbb{R}$
N — множество неотрицательных целых чисел
$\mathbb{Z}$ — множество произвольных целых чисел
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел
$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел
$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное евклидово пространство
$C^m(\Omega)$ — множество m раз непрерывно дифференцируемых в области Ω функций
$\| f \|_A$ — норма f в линейном нормированном пространстве A

$$\tilde{C}^r[a, b] = \{f(x) \in C^r[a, b] : f^{(i)}(a) = f^i(b), \qquad i = 0, 1, \ldots, r-1\}$$

$$W^r = \{f(x) : f(x \in \tilde{C}^r[-\pi, \pi], \quad \|f^{(r)}(x)\|_C \leqslant 1\}$$

$$L_p(\Omega) = \{f(x) : (f : \Omega \to \mathbb{R}), \int_\Omega |f|^p dx < \infty\}$$

$$Z = \{f(x) : \forall h > 0, \quad |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| < Ch\}$$

$$\mathrm{L'p}_C\alpha = \{f(x) : \forall h > 0, \quad |f(x+h) - f(x)| C h^\alpha\}$$

$d_n(A)$ — n-й поперечник (по Колмогорову) в метрике C компакта A

$H^m(\mathbb{R}^n)$ — пространство С. Л. Соболева, $H^m(\mathbb{R}^n) =$

$$= \{f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) : f^{(\alpha)} \in L_2(\mathbb{R}^n)\ \forall\, \alpha,\ |\alpha| \leqslant m\}$$

$\operatorname{supp} f(x)$ — носитель функции $f(x)$, $\operatorname{supp} f(x) = \mathrm{Cl}\{x : f(x) \neq 0\}$

$f \ast \varphi$ — свертка функций f и φ

$X \wedge Y$ — конъюнкция в алгебре логики ($X, Y \in B_k$)

$X \vee Y$ — дизъюнкция в алгебре логики ($X, Y \in B_k$)

$\overline{X}$ — отрицание (если $X \in B_k$) в алгебре логики

$\bar{X}$ — циклическое отрицание (если $X \in B_k$) в алгебре логики

$X \to Y$ — импликация в алгебре логики ($X, Y \in B_k$)

$X \sim Y$ — равнозначность в алгебре логики ($X, Y \in B_k$)

$X \mid Y$ — операция Шеффера в алгебре логики ($X, Y \in B_k$) или фактор-группа группы X по нормальному делителю Y (в зависимости от контекста)

$\wedge_0, \wedge_\alpha, \wedge_0^m, \underset{p}{\wedge}, \ldots$ — символы R-конъюнкций

$\vee_0, \vee_\alpha, \vee_0^m, \underset{p}{\vee}, \ldots$ — символы R-дизъюнкций

$\overline{x}$ — R-отрицание

$\to_0, \to_\alpha, \to_0^m, \ldots$ — символы R-импликаций

$\sim_0, \sim_\alpha, \sim_0^m, \ldots$ — символы R-равнозначностей

$|_0, |_\alpha, |_0^m, \ldots$ — символы R-операций Шеффера

(f, φ) — скалярное произведение или вектор $(f_1, \ldots, f_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ (если $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$) в зависимости от контекста

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВЛАДИМИР ЛОГВИНОВИЧ РВАЧЕВ
ВЛАДИМИР АЛЕКСЕЕВИЧ РВАЧЕВ

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

Печатается по постановлению ученого совета Института проблем машиностроения АН УССР

Редактор С. Д. Кошис
Оформление художника В. Г. Самсонова
Художественный редактор И. П. Антонюк
Технический редактор И. А. Ратнер
Корректор Р. С. Коган

Информ. бланк № 2235

Сдано в набор 03.07.78. Подп. в печ. 29.11.78. БФ 00379. Формат 60×90 $/_{16}$. Бумага типогр. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 12,25. Уч.-изд. л. 11,16. Тираж 2450 экз. Заказ № 9-23. Цена 1 руб. 90 коп.

Издательство «Наукова думка», 252601, Киев, ГСП, Репина, 3

Книжная фабрика «Коммунист» РПО «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, 310012, Харьков-12, Энгельса, 11.